MB101 – 2. demonstrovaná cvičení
Motivační příklady

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

24.9. 2007

Plán přednášky

Příklad 1. *Kolik peněz naspořím za rok, ukládám-li od ledna každý měsíc vždy k 1. v měsíci na účet částku* 1000 *Kč měsíčně, vklad je úročen roční úrokovou mírou* 3%, *přičemž úročení probíhá*

- *na konci roku*
- *na konci každého měsíce*

Předpokládejte, že všechny měsíce jsou stejně dlouhé a to $1/12$ *roku.*

Příklad 1. *Kolik peněz naspořím za rok, ukládám-li od ledna každý měsíc vždy k 1. v měsíci na účet částku* 1000 *Kč měsíčně, vklad je úročen roční úrokovou mírou* 3%*, přičemž úročení probíhá*

- *na konci roku*
- *na konci každého měsíce*

Předpokládejte, že všechny měsíce jsou stejně dlouhé a to $1/12$ *roku.*

Řešení.

- $1000(q + q^2 + \cdots q^{12}) \doteq 12196,8$
- $12000 + 0,03 \cdot 1000 \cdot (1 + \frac{11}{12} + \cdots + \frac{1}{12}) = 12195$

kde $q = 1,0025$. $\square$

Příklad 2. *Na kolik nejvýše a na kolik nejméně částí může dělit sféru n hlavních kružnic? (hlavní kružnice vznikne průnikem sféry a nějaké roviny procházející jejím středem)*

Příklad 2. *Na kolik nejvýše a na kolik nejméně částí může dělit sféru n hlavních kružnic? (hlavní kružnice vznikne průnikem sféry a nějaké roviny procházející jejím středem)*

Řešení. Nejméně na $2n$, nejvíce na $n^2 - n + 2$
$(a_n = a_{n-1} + 2(n-1))$. □

Příklad 3. *Odvoďte vzorec pro součet*

$$\sum_{i=1}^{n} i^4$$

Příklad 3. *Odvoďte vzorec pro součet*

$$\sum_{i=1}^{n} i^4$$

Řešení. $\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$. $\square$

Plán přednášky

Binomická věta

Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, pak

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Binomická věta

Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, pak

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

Binomická věta

Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, pak

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

Sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{i}$$

Na kolik nejvýše částí dělí třírozměrný Eukleidovský prostor n rovin?

Na kolik nejvýše částí dělí třírozměrný Eukleidovský prostor n rovin?

Příklad Množení zajíců. *Na začátku jara přinesl čáp na louku dva čerstvě narozené zajíčky, samečka a samičku. Samička je schopná od dvou měsíců stáří povít každý měsíc dva malé zajíčky (samečka a samičku). Nově narození zajíci splodí potomky po jednom měsíci a pak každý další měsíc. Každá samička je březí jeden měsíc a pak opět porodí samečka a samičku. Kolik párů zajíců bude na louce po devíti měsících (pokud žádný neumře a žádný se tam „nepřistěhuje“)?*

Příklad *Zjednodušený model chování národního produktu.*

$$y_{k+2} - a(1+b)y_{k+1} + aby_k = 1,$$

kde y_k je národní produkt v roce k, konstanta a je takzvaný mezní sklon ke spotřebě, což je makroekonomický ukazatel, který udává jaký zlomek peněz, které mají obyvatelé k dispozici, utratí a konstanta b popisuje jak závisí míra investic soukromého sektoru na mezním sklonu ke spotřebě.
Předpokládáme dále, že velikost národního produktru je normována tak, aby na pravé straně rovnice vyšlo číslo 1.
Spočítejte konkrétní hodnoty pro $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{3}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.