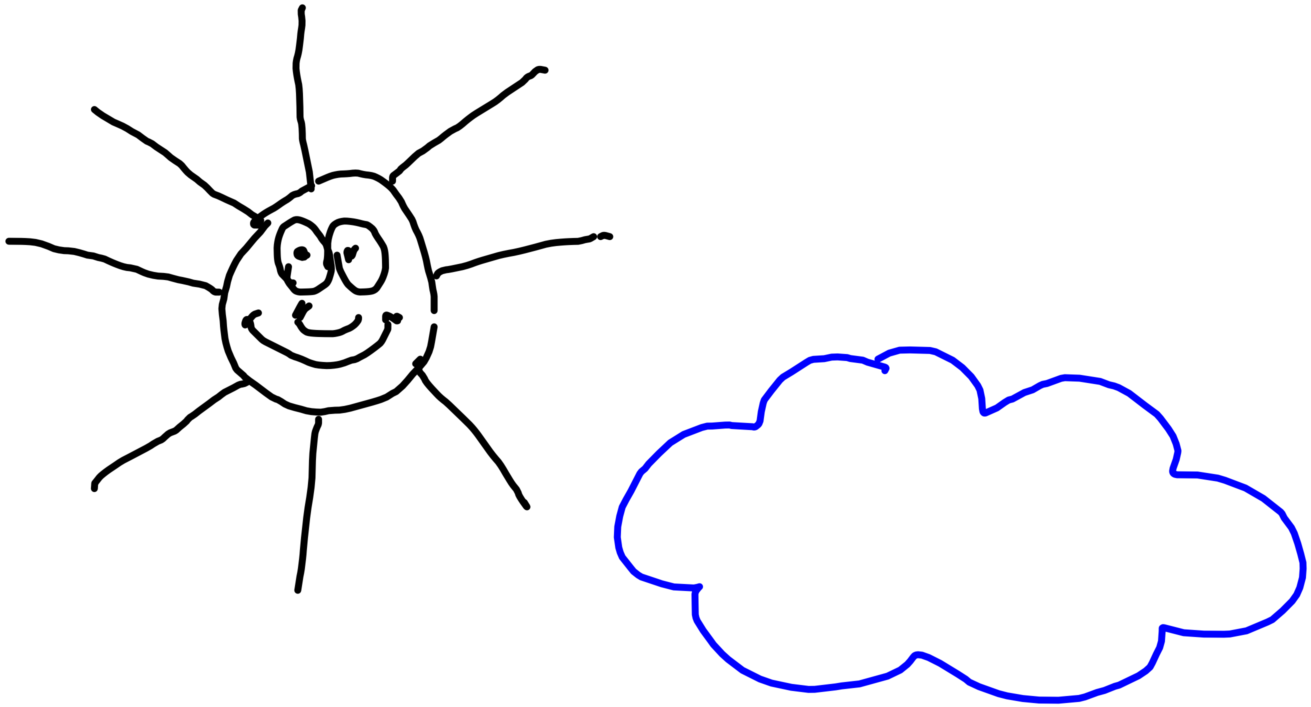


$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;|\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;|\;\cdot\;\cdot$

1 prázdná obálka:

$$\binom{12}{2}\binom{17}{2} - 3(11\cdot 16 - 2) - 3$$

$$\binom{12}{2}\binom{17}{2} - 3(11\cdot 16) + 3$$

Všechna slova délky n neobsahující BBB rozdělíme do 2 skupin:

a) slova končící na A

těch je a_{n-1}

b) slova končící na B

$$a_{n-1} - \underbrace{a_{n-4}}_{\text{slova délky } (n-1) \text{ neobsahující BBB a končící na BB, tj. končící na ABB}}$$

$$a_n = a_{n-1} + \left(a_{n-1} - a_{n-4}\right) = 2a_{n-1} - a_{n-4}$$

Hledáme posloupnosti vyhovující rekurentní formuli ve tvaru

$x_n = b^n$

$$b^n = b^{n-1} + 2\, b^{n-2} \quad \Big/ \cdot \frac{1}{b^{n-2}}$$

$$\boxed{b^2 = b + 2} \quad *$$

$x^2 - x - 2$ ← charakteristický polynom

jeho kořeny splňují $*$, tedy i danou rek. fci.

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -1$$

posloupnosti 2^n a $(-1)^n$ vyhovují dané rek. fci,

ale i $k \cdot 2^n + l \cdot (-1)^n$ $\quad (k, l \in \mathbb{C})$

vyhovují dané fci.

$a_0 = 1:$ $\quad k(+2)^0 + l\cdot(-1)^0 = 1$

$$k + l = 1$$

$a_1 = 1:$ $\quad k\cdot 2^1 + l(-1)^1 = 1$

$$2k - l = 1$$

$$3k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \Rightarrow l = \frac{1}{3}$$

Hledaná posloupnost je tedy

$$x_n = \frac{2}{3}(2^n) + \frac{1}{3}(-1)^n$$

Pravděpodobnostní prostor Ω.

$$\Omega = \{ (k, l) \mid k, l \in \{1,2,3,4,5,6\} \}, \quad |\Omega| = 36$$

$\{k, l\}$ ... špatně

Prostor $\mathcal{A}$ přípustných jevů (padne součet 6) je

$$A = \{ (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) \}.$$

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$$

(tj. hráč nevyhraje žádnou sázku)

Spočítáme pravděpodobnost jevu opačného:

Nejprve pst. toho že hráč nevyhraje v jednom pokusu: $\frac{19}{37}$

(ruleta: 37 čísel, 18 červených, 18 černých a 0)

pst, že nevyhraje ve 4 pokusech je

$$\left(\frac{19}{37}\right)^4$$

Hledaná pst (tedy pst toho, že něco vyhraje) je $1-\left(\frac{19}{37}\right)^5$

Spočítejme pst jevu opačného, tj: že nikdo nezahyne.

Pst toho, že 1 student nezahyne v průběhu 1 roku je $1 - \frac{1200}{10^7} = 1 - \frac{12}{10^5} = 1 - \frac{3}{25\,000}$

$$\left(1 - \frac{3}{25\,000}\right)^{10 \cdot 628} \doteq 0{,}47$$

Pst toho, že nikdo zahyne je tedy cca 0,53

a) $p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

b) Uvažujme všechny možné posloupnosti 16 koulí, které můžeme z klobouku vytáhnout. Těch je

$$P(6,5,5) = \frac{16!}{6!\,(5!)^2}$$

Kolik je posloupností, ve kterých je na 5. místě černá ~~kok~~ koule? Těch je

$$P(5,5,5) = \frac{15!}{(5!)^3}$$

Hledaná psť je

$$\frac{P(5,5,5)}{P(6,5,5)} = \frac{\frac{15!}{(5!)^3}}{\frac{16!}{(6!)(5!)^2}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Všech přesmyček je $P(2,2,1,1,1,1) = \frac{8!}{(2!)^2}$

Nechť A_A je množina přesmyček, ve kterých stojí dvě písmena A vedle sebe a nechť A_K je množina přesmyček, ve kterých stojí 2 písmena K vedle sebe. Zajímá nás počet

$$|A_A \cup A_K| = |A_A| + |A_K| - |A_A \cap A_K|$$

$$|A_A| = P(2,1,1,1,1,1) = \frac{7!}{2}, \qquad |A_K| = \frac{7!}{2}, \qquad |A_A \cap A_K| = P(6) = 6!$$

$$= 7! - 6!$$

Počet hledaných přesmyček je potom

$$\frac{8!}{4} - (7! - 6!) = \frac{8!}{4} - 7! + 6!$$

Spočítejme počet těch rozdělení peněženek, kdy alespoň někdo dostane zpět svoji peněženku. Za tím účelem označme A_i, $1 \le i \le 6$ množinu těch rozdělení, kdy i-tý člověk dostane zpět svoji peněženku. Zajímá nás tedy

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_6| = {} & |A_1| + |A_2| + \dots + |A_6| \\
& - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_5 \cap A_6| \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots \\
& - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
& + \dots -
\end{aligned}
$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right| = \sum_{i=1}^{6}|A_i| - \sum_{1\le i_1 < i_2 \le 6} |A_{i_1}\cap A_{i_2}| +$$

$$+ \sum_{1\le i_1 < i_2 < i_3 \le 6} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| -$$

$$- \sum |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap A_{i_4}| +$$

$$+ \sum | A_{i_1}\cap \dots \cap A_{i_5}| - |A_1\cap \dots \cap A_6|$$

$|A_i| = 5!$, $|A_{i_1}\cap A_{i_2}| = 4!$, $|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| = (6-3)!$

.... $|A_1\cap \dots \cap A_6| = 1 = 0!$

$$= 6\cdot 5! - \binom{6}{2}(6-2)! + \binom{6}{3}(6-3)! - \binom{6}{4}(6-4)! + \binom{6}{5}1! + \binom{6}{6}0! =$$

$$\ldots = \sum_{i=1}^{6} \binom{6}{i}(6-i)!\,(-1)^{i+1}$$

Celkem rozdělení, ve kterých nikdo nedostane zpět svoji peněženku

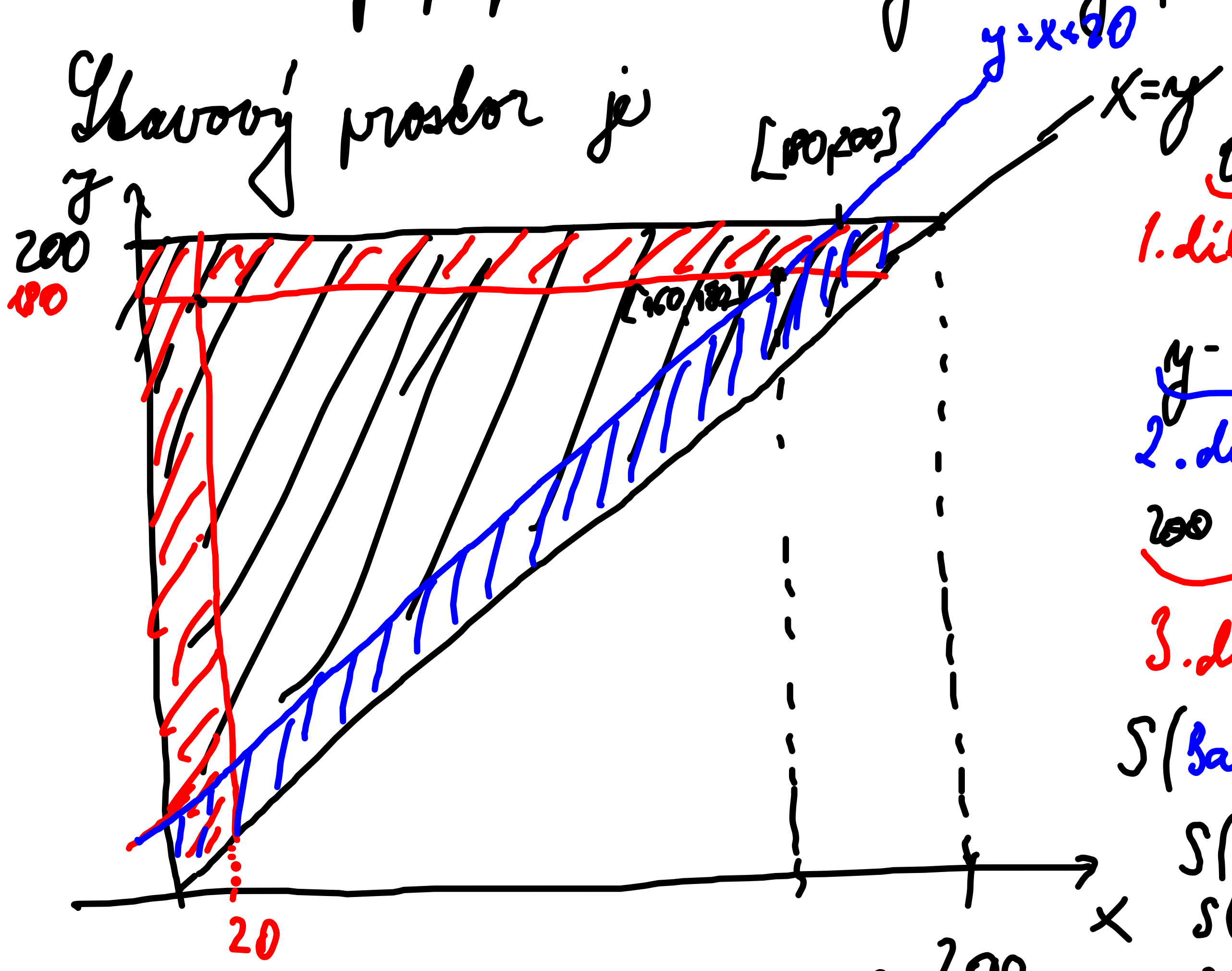
$$6! + \sum_{i=1}^{6} (-1)^i \binom{6}{i}(6-i)!$$

Hledaná pst je tedy $p = 1 + \frac{1}{6!}\left(\sum_{i=1}^{6} (-1)^i \binom{6}{i}(6-i)!\right) =$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$$

Situace je popsána 2 řezy x a y, $0 \le x \le y \le 200$ cm.

Stavový prostor je



$\underbrace{0 \le x \le 20}$

1. díl ≤ 20 cm

$\underbrace{y - x \le 20}$

2. díl ≤ 20 cm

$\underbrace{200 \ge y \ge 180}$

3. díl ≤ 20 cm

$S(\text{barev}) = S(\text{vše}) - S(\text{černé}) =$

$S(\Omega)$

$= \frac{200^2}{2} - \frac{140^2}{2}$

Hledaná psl je $p = 1 - \frac{\frac{140^2}{2}}{\frac{200^2}{2}} = 1 - \frac{14^2}{20^2} = 1 - \frac{7^2}{10^2} = \boxed{\frac{51}{100}}$