1) R: $x \sim x$? ✓

S: $x \sim y \Leftrightarrow NSD(x,y) = 2 \vee x = y \Leftrightarrow NSD(y,x) = 2 \vee y = x \Leftrightarrow$
$y \sim x$ ✓

AS: NE

T: $x \sim y \;\&\; y \sim z \overset{?}{\Rightarrow} x \sim z$

$NSD(x,y) = 2 \vee x = y \;\&\; NSD(y,z) = 2 \vee y = z$

protipříklad $x = 6,\ y = 2,\ z = 12$

$x \sim y \quad (NSD(6,2) = 2)$

$y \sim z \quad (NSD(2,12) = 2)$

ale $x \not\sim z \quad (NSD(6,12) = 6 \;\&\; 6 \neq 12)$

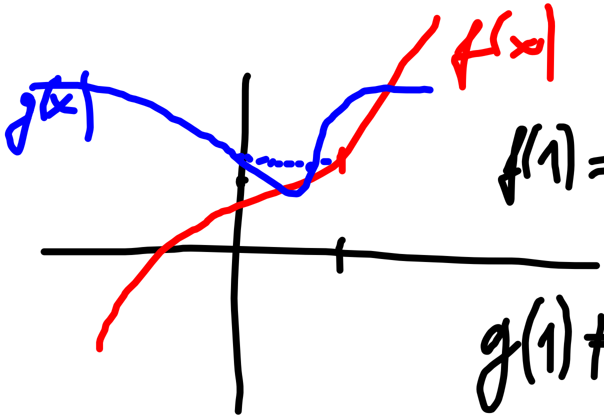
2) $M = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

R: $\forall f : f \sim f$? neplatí

protipříklad: $f = x$, pak $f(0) = 0 \neq f(1) = 1$.

S: $f \sim g \overset{?}{\Rightarrow} g \sim f$

$f(1) = g(0)$



$f(1) = g(0)$

$g(1) \neq f(0)$

$f = x$

$g = 1$ (konst. fce)

T: $f \sim g \;\&\; g \sim h \overset{?}{\Rightarrow} f \sim h$

$f = x$, $g = 1 - 2x$, $h = -1 + x$

$f(1) = 1$, $g(0) = 1$, $g(1) = -1$, $h(0) = -1$, ale $f \not\sim h$

$n = \mathbb{N}$

3) $a \sim b \Leftrightarrow a - 1 < b \Leftrightarrow a \leq b$

$|a-1| < b \in \mathbb{Q}$

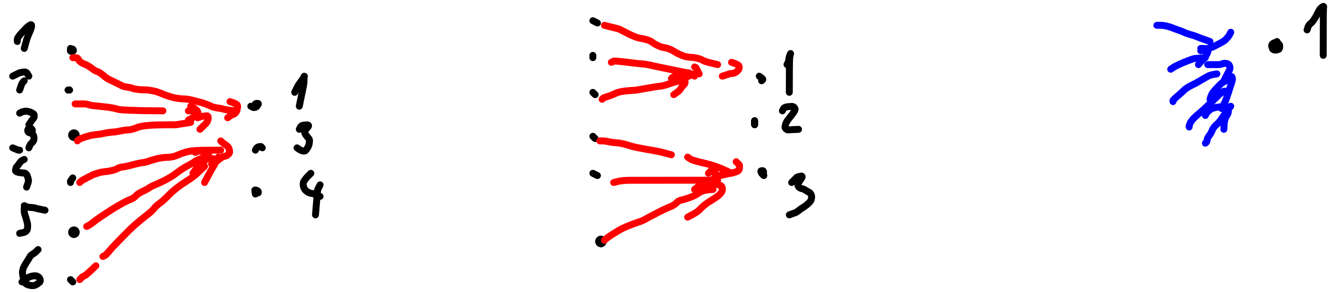
R: V

AS: V

T: V

S: X

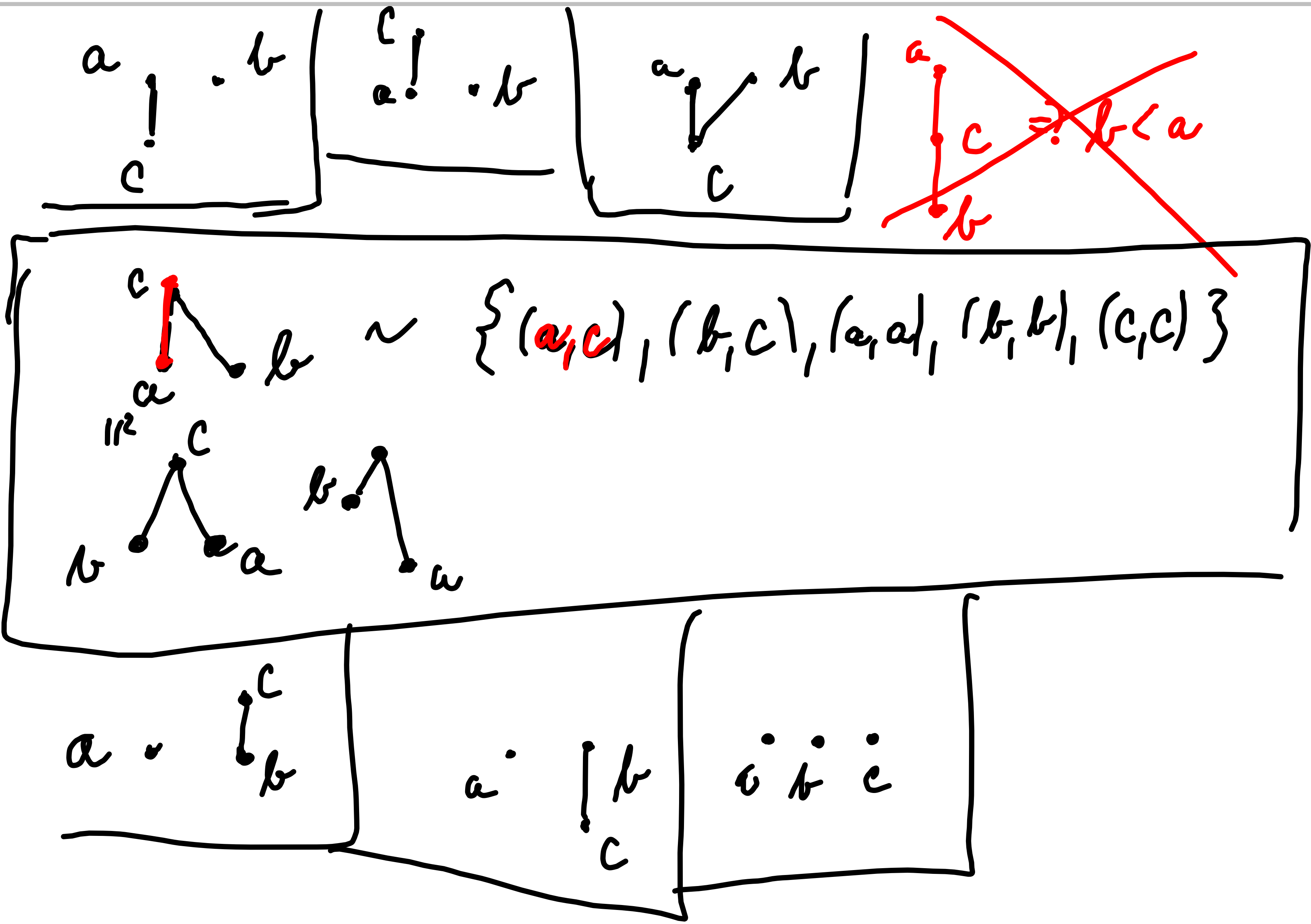
$$\boxed{4^6} - \underset{-3}{\overset{-2}{\boxed{\binom{4}{3}\cdot 3^6}}} + \underset{+3}{\overset{+1}{\binom{4}{2}\cdot 2^6}} - \underset{+1}{\binom{4}{1}\cdot 1^6}$$



3) máme-li uspořádání $\prec$ na mn. M, pak tvrzení a je neporovnatelné s b znamená

$$(a,b) \notin \prec \quad (a \not\prec b)$$

$$(b,a) \notin \prec \quad (b \not\prec a)$$



a b c
$\Rightarrow b < a$
$\{(a,c),(b,c),(a,a),(b,b),(c,c)\}$

$$A:\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$+1$ $+1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

-3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

-1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

-1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underline{P\cdot A} = E \Rightarrow A^{-1} = \boxed{P}$$

$$P = \underline{P\cdot E}$$

$\cdot(-1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Zkouška:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $n \in \mathbb{N}$

$$x^2 + x \neq x^n \text{ pro žádné } n$$

množina není uzavřená vzhledem ke sčítání.

2) Nechť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou řešením

~~této~~ dané rce. Pak $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ $w_n = y_n + z_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

splňuje

$$w_n = y_n + z_n = y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3} + z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3} =$$

$$= (y_{n-1} + z_{n-1}) + (y_{n-2} + z_{n-2}) + (y_{n-3} + z_{n-3}) =$$

$$= w_{n-1} + w_{n-2} + w_{n-3}$$

Nechť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je řešením, pak i $c \cdot \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{c \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$

je zřejmě řešením $c \in \mathbb{R}$

3, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + 1 \qquad (*)$

Nechť $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ jsou řešení, pak $\{w_n\} = \{y_n\} + \{z_n\}$

$$w_n = y_n + z_n = y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3} + \boxed{1} + z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3} + 1 =$$
$$= w_{n-1} + w_{n-2} + w_{n-3} + 2$$

Nechť $\{y_n\}$ je řešením $(*)$ a $\{z_n\}$ řešením zhomogenizované rce $(*)$, pak $\{w_n\} = \{y_n\} + \{z_n\}$

$$w_n = y_n + z_n = y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3} + 1 + z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3} =$$
$$= w_{n-1} + w_{n-2} + w_{n-3} + 1$$

$$x_n = x_{n-1}^2 + x_{n-2} + x_{n-3}^2$$

$$w_n = y_n + z_n = y_{n-1}^2 + y_{n-2} + y_{n-3}^2 + z_{n-1}^2 + z_{n-2} + z_{n-3}^2 =$$

$$= \underbrace{\left(y_{n-1}^2 + z_{n-1}^2\right)}_{\neq w_{n-1}^2} + \underbrace{\left(y_{n-2} + z_{n-2}\right)}_{w_{n-2}} + \left(y_{n-3}^2 + z_{n-3}^2\right)$$

---

nechť (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) jsou řešeními dané soustavy, pak i $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ je řešením dané soustavy.

$$2(x_1+x_2) + 3(y_1+y_2) + (z_1+z_2) = \overbrace{2x_1 + 3y_1 + z_1}^{0} +$$

$$+ \underbrace{2x_2 + 3y_2 + z_2}_{0} = 0$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$h(A) = 3$ vektory dané řádky jsou lin. nezávislé

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -5 \\ 0 & 11 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad h(B) = 2$$

dané vektory jsou l. závislé

Souvislost s řešením odpovídajících l. soustav:

$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ řešení pouze vektor $(0,0,0)^T$

$$B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$

$-11x_2 - 5x_3 = 0$

$x_3 = -\frac{11}{5} x_2$

$x_1 + 3x_2 + \frac{22}{5} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{37}{5} x_2$

Řešení tvaru $\left(-\frac{7}{5}x_2,\ x_2,\ -\frac{11}{5}x_2\right),\ x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-a) \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2 - 1) - a(a^3 - a) = -a^4 + 2a^2 - 1$$