MB101 – 8. demonstrovaná cvičení
Determinanty

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

5.11. 2007

Plán přednášky

1. Domácí úlohy z minulého týdne
2. Návodné úlohy

Příklad 1. *Určete dimenzi a alespoň dvě různé báze vektorového prostoru čtvercových antisymetrických* ($A^T = -A$) *matic* $n \times n$ *nad reálnými čísly.*

Příklad 1. *Určete dimenzi a alespoň dvě různé báze vektorového prostoru čtvercových antisymetrických ($A^T = -A$) matic $n \times n$ nad reálnými čísly.*

Řešení. Dimenze je $n(n-1)/2$. $\square$

Příklad 2. *Uvažujme komplexní čísla jako vektorový prostor nad reálnými čísly, sčítání vektorů je sčítáním komplexních čísel. Ukažte, že čísla* $2 + i$ *a* $1 - 2i$ *tvoří bázi tohoto vektorového prostoru a napište souřadnice čísla* $4 + i$ *v této bázi.*

Příklad 2. *Uvažujme komplexní čísla jako vektorový prostor nad reálnými čísly, sčítání vektorů je sčítáním komplexních čísel. Ukažte, že čísla* $2+i$ *a* $1-2i$ *tvoří bázi tohoto vektorového prostoru a napište souřadnice čísla* $4+i$ *v této bázi.*

Řešení. Čísla $2+i$ a $1-2i$ jsou zřejmě nezávislé vektory (jeden není násobkem druhého) a libovolné komplexní číslo $x+iy$ můžeme napsat jako lineární kombinaci těchto vektorů

$$x+iy = a(2+i)+b(1-2i) \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{5}(2x+y),\ b = \frac{1}{5}(x-2y),$$

specielně pro $x=4$ a $y=1$ máme souřadnice $(\frac{9}{5}, \frac{2}{5})$. □

Příklad 3. *Napište matici zobrazení zrcadlení podle roviny procházející počátkem a kolmé na vektor* $(1, 0, 1)$*.*

Příklad 3. *Napište matici zobrazení zrcadlení podle roviny procházející počátkem a kolmé na vektor* $(1, 0, 1)$.

Řešení.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lze odvodit i přímou úvahou. □

Plán přednášky

Příklad *Spočítejte determinant a pomocí algebraicky adjungované matice i inverzní matici k matici*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Příklad *Spočítejte následující determinant:*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 0 & 1 \\ a & a & 0 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix}$$

Příklad *Spočítejte následující determinant:*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 0 & 1 \\ a & a & 0 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení. $2a^2 - a^3 - a$. $\square$

Příklad *Určete inverzní matici matice z předchozího příkladu.*

Příklad *Určete inverzní matici matice z předchozího příkladu.*

Řešení.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1/(-1+a) & -1/(a*(-1+a)) & 0 \\ -a/(-1+a) & -(a+1)/(-1+a) & (a+1)/(-1+a) & 1/(-1+a) \\ 1 & 1 & -(a+1)/a & 0 \\ a/(-1+a) & a/(-1+a) & -a/(-1+a) & -1/(-1+a) \end{vmatrix}$$

□

Cramerovo pravidlo

Příklad *Řešte následující systém lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ 3x - 2y - z &= 3 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

.

Cramerovo pravidlo

Příklad *Řešte následující systém lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ 3x - 2y - z &= 3 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

.

Řešení. $x = \frac{29}{16}$, $y = \frac{27}{16}$, $z = -\frac{15}{16}$. $\square$