$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a & a & 1 \\ 1 & a & a & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a \\ 1 & a & a & a \\ 0 & a & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^7 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & a \\ 1 & a & a & a \\ 0 & a & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & a & a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 0 & a & a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & a \\ 0 & a & a \end{vmatrix} =$$

$$= a\left(\cancel{a^2} - \cancel{a^2} - a\right) - a\left(-a^2 + a\right) + a\left(a - a^2 - a^2\right) + a^3 + a^2 - a^3 - a$$

$$= -a^3 + a$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

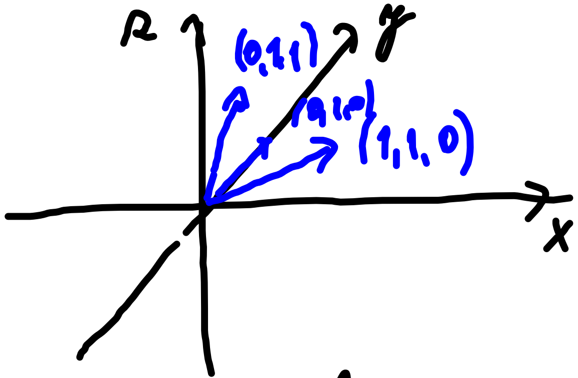
$$c = \begin{pmatrix} c_1 \dots c_n \end{pmatrix}$$

$$b \cdot c = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \dots c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 c_1 & b_1 c_2 & \dots & b_1 c_n \\ b_2 c_1 & b_2 c_2 & \dots & b_2 c_n \\ \vdots & & & \\ b_m c_1 & b_m c_2 & \dots & b_m c_n \end{pmatrix}$$

Nechť $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ je nenulový řádek v matici A, volme $c = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ a vektor b, resp. b_i volíme jako odpovídající násobky i-tého řádku

Pokud by $m=n$, můžeme násobit

$$(b_1,\dots,b_m)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = b_1c_1 + b_2c_2 + \dots + b_mc_m$$



K převádění souřadnic slouží matice přechodu (od báze k bázi).

Mějme $((1,1,0),(0,1,1),(0,1,0)) =: f$

Zajímá nás matice přechodu od e k f.

Snadno můžeme zapsat matici přechodu od f k e:
do sloupců matice zapíšeme vektory báze f:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Potom matice přechodu od e k f je inverzní k A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Souřadnice vektoru $(1, 0, 1)$ v bázi f jsou

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

V prostoru všech fcí uvažujme

$$V = \{a\cdot\cos^2(x) + b\cdot\sin^2(x) + c\cdot x \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

x^2 ... nelze dostat jako lin. kombinaci daných tří fcí

$\cos(2x)$

$$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos^2 x + 2i\sin x\cos x - \sin^2 x$$
$$= \cos 2x + i\sin 2x$$

$\mathrm{Re}: \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Rightarrow$ v bázi $(\sin^2 x, \cos^2 x, x)$ má vektor $\cos(2x)$ souřadnice $(-1, 1, 0)$

$$f : V \to W$$

$$f(v+w) = f(v) + f(w) \quad \forall v, w \in V$$

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v) \quad \forall a \in F, \ \forall v \in V$$

Př. nechť $V = W = \mathbb{R}^3$. Pak

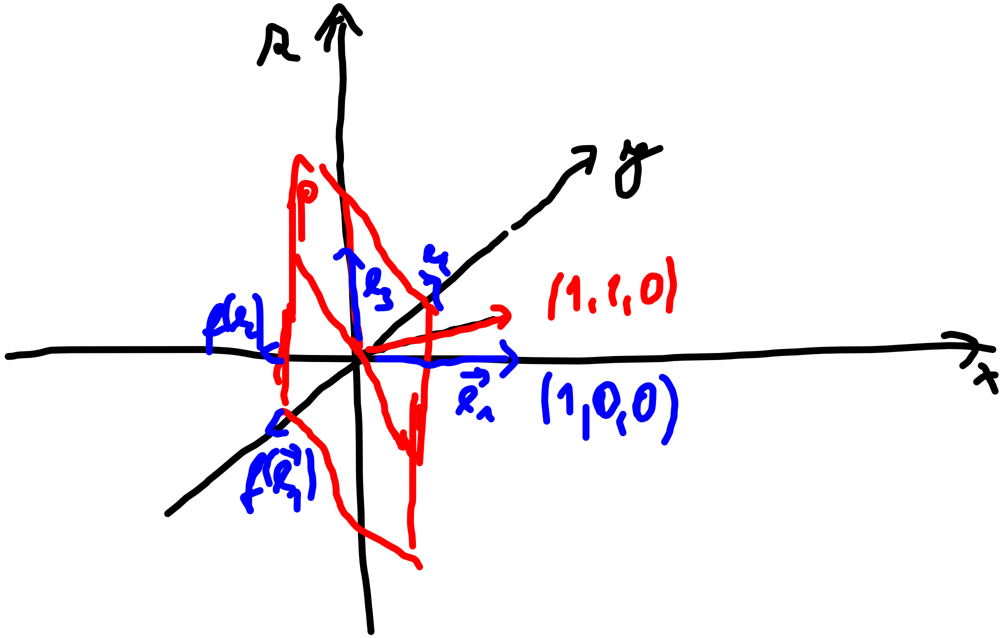
$$\vec{v} = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2 + c \cdot \vec{e}_3$$

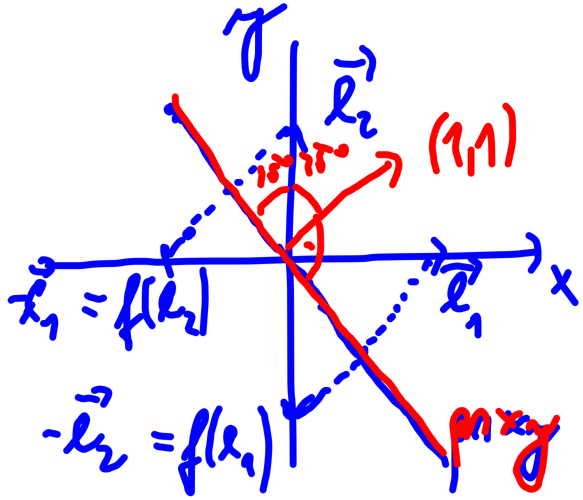
$$f(\vec{v}) = f(a \cdot \vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3) = a f(\vec{e}_1) + b f(\vec{e}_2) + c \cdot f(\vec{e}_3) =$$

$$= a(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) + b(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) +$$

$$+ c(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) = \vec{e}_1(a a_{11} + b a_{12} + c a_{13})$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ kde } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$





$f(e_3) = e_3$

Sym. matice zrcadlení podle dané roviny

je
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice A zobrazení f je dána jako

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jádro zobrazení odpovídá řešení systému lin. rovnic:

$A\vec{x} = \vec{o}$, kde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, tedy

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -x_2 - x_4$$

jádro je vekt. prostor $K = \{(-s, s, -s-u, u) \mid s, u \in \mathbb{R}\}$

s bází $((-1, 1, -1, 0), (0, 0, -1, 1)\}$.

obrazem je celé $\mathbb{R}^2$.

K nalezení matice f v bázi $g = ((1,2,1),(1,0,1),(0,0,-1))$ budeme potřebovat matice přechodu od báze g ke st. bázi a naopak.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matice přechodu od st. báze ke g je

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nechť $(\vec{v})_g$ jsou souřadnice vektoru v v bázi g. Pak

$$f(v) = A_g (\vec{v})_g = T^{-1} A \underbrace{T (\vec{v})_g}_{(\vec{v})_e} \Rightarrow A_g = T^{-1} A T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$