

## První test – skupina A

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO. Zlomte vaz!

### Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí“ (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí“ (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte, tj. např. „1 platí, 3 a 4 neplatí“ – vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! (Uvědomte si, že matematická věta je pravdivá pouze tehdy, když platí za všech uvažovaných okolností: nesmí existovat ani jeden protipříklad.) Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte. Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů.

**Tvrzení 1.** Existují alespoň dva různé polynomy stupně 4, které nabývají v bodech  $-1, 1, 2, 5$  po řadě hodnot  $6, 0, 54, 1999$  a které mají v bodě  $-188$  první derivaci rovnu 0.

**Tvrzení 2.** Třináctá derivace polynomu  $x^{15} - x^5 + 12x^2 - 111$  je racionální lomená funkce, jenž má více než dva různé nulové body (tj. alespoň ve dvou různých bodech reálné přímky nabývá hodnoty 0).

**Tvrzení 3.** Funkce

$$f(x) := \frac{\ln(x+1)}{x}, \quad x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$$

má v bodě 0 odstranitelnou nespojitost.

**Tvrzení 4.** Každá funkce  $f$  spojitá na intervalu  $I := [0, 122]$  nabývá v alespoň jednom bodě intervalu  $I$  infima množiny  $\{f(x); x \in (0, 100)\}$ .

**Tvrzení 5.** Má-li libovolná funkce  $f$  vlastní derivaci na otevřeném intervalu  $I$ , pak platí, že je neklesající na  $I$  právě tehdy, když je  $f'(x) > 0$  pro všechna  $x \in I$ .

*Výsledky 1–5.* Odpověď za 5 bodů je

3, 4 platí, 1, 2, 5 neplatí.

□

## Část II. (Celkem 5 bodů.)

**Úloha 6 (2 body).** Stanovte supremum a infimum prázdné množiny v  $\mathbb{R}$ . Pokud tvrdíte, že  $\sup \emptyset$  v  $\mathbb{R}$  neexistuje, udejte příklad množiny  $M \subset \mathbb{R}$ , která nemá v  $\mathbb{R}$  infimum, ale má zde supremum. Pokud tvrdíte, že  $\inf \emptyset$  v  $\mathbb{R}$  neexistuje, udejte příklad množiny  $N \subset \mathbb{R}$ , která nemá v  $\mathbb{R}$  supremum, ale má zde infimum.

*Výsledek.* V  $\mathbb{R}$  neexistuje  $\sup \emptyset$  ani  $\inf \emptyset$ . Lze položit kupř.

$$M := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \quad N := \mathbb{N}.$$

□

**Úloha 7 (1 bod).** Definujte (za pomoci limity) spojitost funkce  $f$  v reálném bodě  $x_0$ .

*Výsledek.* Viz skriptum doc. Hilschera, podkapitola 2.5.

□

**Úloha 8 (2 body).** Uveďte Lagrangeovu větu o střední hodnotě, včetně podmínek!

*Výsledek.* Viz skriptum doc. Hilschera, podkapitola 2.10.

□

## Část III. (Celkem 20 bodů.)

**Příklad 9 (5 bodů).** Sestrojte přirozený kubický interpolační splajn pro uzly

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

a po řadě hodnoty v těchto bodech

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 1.$$

*Výsledek.* Výsledkem jsou kubické polynomy

$$S_0(x) = \frac{1}{2}(x+1)^3 - \frac{3}{2}(x+1) + 1, \quad x \in [-1, 0];$$

$$S_1(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2, \quad x \in [0, 1].$$

□

**Příklad 10 (4 body).** Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin^2 x}{x}.$$

*Výsledek.* Je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin^2 x}{x} = 0.$$

□

**Příklad 11 (2 body).** V libovolném bodě  $x \notin \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$  určete první derivaci funkce  $f(x) := \sqrt[3]{\sin x}$ .

*Výsledek.* Platí

$$f'(x) = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}, \quad x \notin \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}.$$

□

**Příklad 12 (4 body).** Existuje-li mezi obdélníky o obvodu  $4c$  (reálné  $c > 0$  je dáno) obdélník s maximálním obsahem, stanovte délky jeho stran.

*Výsledek.* Obdélník s daným obvodem a maximálním obsahem existuje. Jedná se o čtveřec s délkou strany  $c$ . □

**Příklad 13 (5 bodů).** Najděte Taylorův rozvoj 3. řádu (tj. máte uvést Taylorův polynom stupně 3, tedy polynom stupně nejvýše 3) funkce  $\frac{1}{\cos x}$  v bodě  $x_0 = 0$ .

*Výsledek.* Hledaný polynom je  $1 + \frac{x^2}{2}$ . □

Část IV. (Celkem 0 bodů.)

Pokud se již nudíte, zkuste se trošičku zamyslet a vyřešit níže uvedený příklad:

**Příklad 14 (0 bodů).** Uvažujte funkci

$$\ln \frac{3e^{2x} + e^x + 10}{e^x + 1}$$

definovanou pro všechna reálná  $x$  a nalezněte všechny její asymptoty.

*Výsledek.* Daná funkce má 2 asymptoty, a to  $y = \ln 10$ ,  $y = x + \ln 3$ .

□

## První test – skupina B

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO. Zlomte vaz!

### Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí“ (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí“ (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte, tj. např. „1 platí, 3 a 4 neplatí“ – vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! (Uvědomte si, že matematická věta je pravdivá pouze tehdy, když platí za všech uvažovaných okolností: nesmí existovat ani jeden protipříklad.) Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte. Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů.

**Tvrzení 1.** Každý *nenulový* polynom, který můžeme vyjádřit ve tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

pro nějaká reálná čísla  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ , je stupně  $n$ . Pro úplnost dodejme, že uvažujeme  $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Tvrzení 2.** Funkce je spojitá v bodě, právě když je v tomto bodě definovaná a má v tomto bodě obě jednostranné limity, přičemž tyto limity si jsou rovny.

**Tvrzení 3.** Funkce

$$f(x) := \sin \left( \arctg \left( \left| 12x^{21} + 11 \right| \cdot \frac{e^{\sin(x+2)-x^3}}{-11 - x^{22}} \right) \right) + \sin(\sin(\sin(\sin x))), \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na celém  $\mathbb{R}$ .

**Tvrzení 4.** Pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  je  $(\cosh x)' = -\sinh x$ .

**Tvrzení 5.** Nechť pro nějakou funkci  $f$  a reálný bod  $x$  platí

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \quad f^{(3)}(x) = 100.$$

Potom má funkce  $f$  v bodě  $x$  ostré lokální minimum.

Výsledky 1–5. Odpověď za 5 bodů je

1, 2, 4, 5 neplatí, 3 platí.

□

## Část II. (Celkem 5 bodů.)

**Úloha 6 (2 body).** Přímo z definice limity spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)^3 - 11}{2},$$

tj. udejte tzv.  $\delta(\varepsilon)$ -předpis (čili užitje  $\varepsilon$ - $\delta$  definici).

*Výsledek.* Existence limity a rovnost

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)^3 - 11}{2} = -\frac{11}{2}$$

plyne např. z volby  $\delta := \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .

□

**Úloha 7 (1 bod).** Vyjádřete derivaci součinu čtyř funkcí

$$[f(x)g(x)h(x)k(x)]'$$

ve tvaru součtu 4 součinů daných funkcí či jejich derivací za předpokladu, že výše uvedený výraz existuje a má obvyklý význam.

*Výsledek.* Platí

$$\begin{aligned} [f(x)g(x)h(x)k(x)]' &= f'(x)g(x)h(x)k(x) + f(x)g'(x)h(x)k(x) \\ &\quad + f(x)g(x)h'(x)k(x) + f(x)g(x)h(x)k'(x) \end{aligned}$$

pro každé  $x \in \mathbb{R}$  a libovolné funkce  $f, g, h, k$  diferencovatelné v  $x$ .

□

**Úloha 8 (2 body).** Nechtě je dána funkce  $f$  mající vlastní derivaci na intervalu  $I$ . Jaké musí splňovat podmínky, abychom o ní mohli říci, že je konvexní? Uveďte definici a alespoň jednu další libovolnou postačující podmínku.

*Výsledek.* Viz skriptum doc. Hilschera, podkapitola 2.14, Definice 11. V případě postačující podmínky odkažme kupř. na Větu 20, tamtéž.  $\square$

### Část III. (Celkem 20 bodů.)

**Příklad 9 (4 body).** Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{4x^2 + 13x - 2}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$$

na parciální zlomky.

*Výsledek.* Všude, kde jsou výrazy definovány, platí

$$\frac{4x^2 + 13x - 2}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12} = \frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x + 2} - \frac{1}{x + 3}.$$

$\square$

**Příklad 10 (5 bodů).** Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \sqrt{1 + x^2} - x \right],$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{1 + x^2} - 21x^7 + x^{10} - 8x^5 + 44x^2}{3x + \sqrt[5]{6x^6 + x^{23}} - 18x^5 - 592x^4}.$$

*Výsledek.* Obě limity existují a platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \sqrt{1 + x^2} - x \right] = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{1 + x^2} - 21x^7 + x^{10} - 8x^5 + 44x^2}{3x + \sqrt[5]{6x^6 + x^{23}} - 18x^5 - 592x^4} = \frac{7}{18}.$$

$\square$

**Příklad 11 (2 body).** Pro kladná  $x$  uveďte derivaci funkce  $x^{\ln x}$ .

*Výsledek.* Snadnou úpravou lze ze vzorce uvedeného na cvičení obdržet výsledek

$$2x^{\ln x - 1} \ln x.$$

□

**Příklad 12 (4 body).** Za pomoci diferenciálu přibližně určete  $\sin\left(\frac{46}{180}\pi\right)$ .

*Výsledek.* Výsledek může být uveden ve tvaru

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{360}.$$

□

**Příklad 13 (5 bodů).** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) := \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Tedy uveďte definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; určete body nespojitosti a jejich druh (pokud existují), nulové body (pokud existují) a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; a všechny asymptoty. Počítat hodnoty ve význačných bodech ani načrtávat graf nemusíte.

*Výsledek.* Funkce má derivace všech řádů na celé reálné přímce. Je lichá, všude rostoucí, konvexní na záporné poloose, konkávní na kladné, kde také nabývá kladných hodnot. Má dvě asymptoty, a to  $y = -1$  v  $-\infty$  a  $y = 1$  v  $+\infty$ . Infimum oboru hodnot je tedy  $-1$  a supremum  $1$ . □

#### Část IV. (Celkem 0 bodů.)

Pokud se již nudíte, zkuste se trošičku zamyslet a vyřešit níže uvedený příklad:



**Příklad 14 (0 bodů).** Napište 26. derivaci funkce

$$f(x) := \sin x + x^{23} - x^{18} + 15x^{11} - 13x^8 - 5x^4 - 11x^3 + 16 + e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Výsledek.* Platí

$$f^{(26)}(x) = -\sin x + e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

## První test – skupina C

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO. Zlomte vaz!

### Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí“ (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí“ (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte, tj. např. „1 platí, 3 a 4 neplatí“ – vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! (Uvědomte si, že matematická věta je pravdivá pouze tehdy, když platí za všech uvažovaných okolností: nesmí existovat ani jeden protipříklad.) Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte. Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů.

**Tvrzení 1.** Pro zcela libovolně dané navzájem různé body  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  a hodnoty  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  existuje nekonečně mnoho polynomů stupně nejvýše  $n+1$  (tj. stupně  $n+1$ , nebo menšího), které v daných bodech nabývají uvedených hodnot (při zachování pořadí).

**Tvrzení 2.** Pro každé dva polynomy  $P, Q$ , přičemž  $Q$  není identicky roven nulovému polynomu a současně  $\text{st } P < \text{st } Q$ , lze z nich složenou racionální ryze lomenou funkci  $\frac{P}{Q}$  vyjádřit ve tvaru součtu parciálních zlomků, a to jednoznačně, tj. tento součet je určen jednoznačně až na pořadí jednotlivých zlomků.

**Tvrzení 3.** Nechť je zcela libovolně dán interval  $I$ . Je-li funkce  $f$  spojitá a rostoucí na  $I$ , potom je také inverzní funkce  $f^{-1}$  spojitá a rostoucí na  $f(I)$ .

**Tvrzení 4.** Součin směrnice tečny a směrnice normály (ke grafu nějaké diferencovatelné funkce v daném bodě) je vždy roven  $-1$ .

**Tvrzení 5.** Každá funkce  $f$  může mít nejvýše dvě asymptoty se směrnicí, zatímco pro každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje funkce  $f_n$  definovaná na  $\mathbb{R}$ , která má právě  $n$  asymptot bez směrnice.

*Výsledky 1–5.* Odpověď za 5 bodů je

1, 3, 4, 5 platí, 2 neplatí.

□

## Část II. (Celkem 5 bodů.)

**Úloha 6 (1 bod).** Uveďte větu O třech limitách (tzv. větu O třech policajtech).

*Výsledek.* Viz skriptum doc. Hilschera, podkapitola 2.4, Věta 4. □

**Úloha 7 (2 body).** Nalezněte všechny body nespojitosti funkcí

$$f(x) := \frac{e^x - 1}{x}, \quad g(x) := \frac{e^x - 1}{|x|}$$

s největším možným definičním oborem v  $\mathbb{R}$  a určete, jakého jsou druhu: nespojitost odstranitelná, 1. druhu, či 2. druhu.

*Výsledek.* Funkce  $f$  a  $g$  nejsou spojitě pouze v bodě  $x = 0$ , kde mají po řadě odstranitelnou nespojitost, respektive nespojitost 1. druhu. (Funkce  $f$  tedy může být dodefinována tak, aby byla spojitou ve všech reálných bodech.) □

**Úloha 8 (2 body).** Udejte příklad dvou funkcí  $f$  a  $g$ , které nejsou diferencovatelné v žádném reálném bodě, ale jejich kompozice  $f \circ g$  má derivaci na celé reálné přímce.

*Výsledek.* Volbou  $f = g$ , přičemž  $f$  je definována tak, že v racionálních číslech nabývá hodnoty 1, zatímco v iracionálních číslech hodnoty  $-5$ , dostaneme konstantní funkci  $f \circ g$ , a tudíž funkci diferencovatelnou v každém bodě reálné přímky. □

## Část III. (Celkem 20 bodů.)

**Příklad 9 (4 body).** Stanovte Hermitův interpolační polynom, je-li požadováno:

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \quad y_0 = -11, \quad y_1 = 1, \quad y'_0 = 12, \quad y'_1 = 4.$$

*Výsledek.* Hledaný polynom je  $x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ . □

**Příklad 10 (5 bodů).** Užitím l'Hospitalova pravidla doplňte

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\sin x} = \dots, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots$$

*Výsledek.* Dvojitým užitím l'Hospitalova pravidla lze ukázat, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

Současně je známo, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

**Příklad 11 (5 bodů).** Napište rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí  $x^3 + y^3 - 2xy = 0$  v bodě  $[1, 1]$ .

*Výsledek.* Rovnice tečny je  $y = 2 - x$ , normály  $y = x$ .

□

**Příklad 12 (4 body).** Nalezněte všechna lokální maxima a minima funkce  $f(x) := x \ln^2 x$  definované na intervalu  $(0, \infty)$ .

*Výsledek.* V bodě  $x = e^{-2}$  nabývá funkce  $f$  lokálního maxima a v bodě  $x = 1$  potom lokálního minima.

□

**Příklad 13 (2 body).** Určete Taylorův polynom se středem v počátku (tj. pro  $x_0 = 0$ ) stupně alespoň 8 funkce  $e^{2x}$ .

*Výsledek.* Výsledek je

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^k x^k}{k!}, \quad n \geq 8, n \in \mathbb{N}.$$

□

Část IV. (Celkem 0 bodů.)

Pokud se již nudíte, zkuste se trošičku zamyslet a vyřešit níže uvedený příklad:

**Příklad 14 (0 bodů).** Určete derivaci funkce

$$f(x) := \frac{(x+2)^3 \sqrt[3]{x-1}}{e^x (x+132)^2}$$

pro  $x > 1$ .

*Výsledek.* Pro všechna  $x > 1$  je

$$f'(x) = \frac{(x+2)^3 \sqrt[3]{x-1}}{e^x (x+132)^2} \left( \frac{3}{x+2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+132} - 1 \right).$$

□