První test – skupina A

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také své UČO. Zlomte vaz!

Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí“ (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí“ (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte, tj. např. „1 platí, 3 a 4 neplatí“ – vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! (Uvědomte si, že matematická věta je pravdivá pouze tehdy, když platí za všech uvažovaných okolností: nesmí existovat ani jeden protipříklad.) Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte. Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů.

Tvrzení 1. Existují alespoň dva různé polynomy stupně 4, které nabývají v bodech $-1, 1, 2, 5$ po řadě hodnot $6, 0, 54, 1999$ a které mají v bodě -188 první derivaci rovnu 0.

Tvrzení 2. Třináctá derivace polynomu $x^{15} - x^5 + 12x^2 - 111$ je racionální lomená funkce, jenž má více než dva různé nulové body (tj. alespoň ve dvou různých bodech reálné přímky nabývá hodnoty 0).

Tvrzení 3. Funkce

$$f(x) := \frac{\ln(x+1)}{x}, \quad x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$$

má v bodě 0 odstranitelnou nespojitost.

Tvrzení 4. Každá funkce f spojitá na intervalu $I := [0, 122]$ nabývá v alespoň jednom bodě intervalu I infima množiny $\{f(x);\, x \in (0, 100)\}$.

Tvrzení 5. Má-li libovolná funkce f vlastní derivaci na otevřeném intervalu I, pak platí, že je neklesající na I právě tehdy, když je $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I$.

Část II. (Celkem 5 bodů.)

Úloha 6 (2 body). Stanovte supremum a infimum prázdné množiny v $\mathbb{R}$. Pokud tvrdíte, že $\sup \emptyset$ v $\mathbb{R}$ neexistuje, udejte příklad množiny $M \subset \mathbb{R}$, která nemá v $\mathbb{R}$ infimum, ale má zde supremum. Pokud tvrdíte, že $\inf \emptyset$ v $\mathbb{R}$ neexistuje, udejte příklad množiny $N \subset \mathbb{R}$, která nemá v $\mathbb{R}$ supremum, ale má zde infimum.

Úloha 7 (1 bod). Definujte (za pomoci limity) spojitost funkce f v reálném bodě x_0.

Úloha 8 (2 body). Uveďte Lagrangeovu větu o střední hodnotě, včetně podmínek!

Část III. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 9 (5 bodů). Sestrojte přirozený kubický interpolační splajn pro uzly $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a po řadě hodnoty v těchto bodech $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Příklad 10 (4 body). Vypočtěte

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin^2 x}{x}, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Příklad 11 (2 body). V libovolném bodě $x \notin \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ určete první derivaci funkce $f(x) := \sqrt[3]{\sin x}$.

Příklad 12 (4 body). Existuje-li mezi obdélníky o obvodu $4c$ (reálné $c > 0$ je dáno) obdélník s maximálním obsahem, stanovte délky jeho stran.

Příklad 13 (5 bodů). Najděte Taylorův rozvoj 3. řádu (tj. máte uvést Taylorův polynom stupně 3, tedy polynom stupně nejvýše 3) funkce $\frac{1}{\cos x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Pokud se již nudíte, zkuste se trošičku zamyslet a vyřešit níže uvedený příklad:

Příklad 14 (0 bodů). Uvažujte funkci

$$\ln \frac{3e^{2x} + e^x + 10}{e^x + 1}$$

definovanou pro všechna reálná x a nalezněte všechny její asymptoty.

První test – skupina B

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také své UČO. Zlomte vaz!

Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí“ (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí“ (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte, tj. např. „1 platí, 3 a 4 neplatí“ – vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! (Uvědomte si, že matematická věta je pravdivá pouze tehdy, když platí za všech uvažovaných okolností: nesmí existovat ani jeden protipříklad.) Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte. Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů.

Tvrzení 1. Každý *nenulový* polynom, který můžeme vyjádřit ve tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

pro nějaká reálná čísla $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, je stupně n. Pro úplnost dodejme, že uvažujeme $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Tvrzení 2. Funkce je spojitá v bodě, právě když je v tomto bodě definovaná a má v tomto bodě obě jednostranné limity, přičemž tyto limity si jsou rovny.

Tvrzení 3. Funkce

$$f(x) := \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\left|\,12x^{21} + 11\,\right| \cdot \frac{e^{\sin(x+2)-x^3}}{-11 - x^{22}}\right)\right) + \sin(\sin(\sin(\sin x))), \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

Tvrzení 4. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $(\cosh x)' = -\sinh x$.

Tvrzení 5. Nechť pro nějakou funkci f a reálný bod x platí $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f^{(3)}(x) = 100$. Potom má funkce f v bodě x ostré lokální minimum.

Část II. (Celkem 5 bodů.)

Úloha 6 (2 body). Přímo z definice limity spočtěte

$$\lim_{x \to -1} \frac{(1+x)^3 - 11}{2},$$

tj. udejte tzv. $\delta(\varepsilon)$-předpis (čili užijte ε–δ definici).

Úloha 7 (1 bod). Vyjádřete derivaci součinu čtyř funkcí $[f(x)g(x)h(x)k(x)]'$ ve tvaru součtu 4 součinů daných funkcí či jejich derivací za předpokladu, že výše uvedený výraz existuje a má obvyklý význam.

Úloha 8 (2 body). Nechť je dána funkce f mající vlastní derivaci na intervalu I. Jaké musí splňovat podmínky, abychom o ní mohli říci, že je konvexní? Uveďte definici a alespoň jednu další libovolnou postačující podmínku.

Část III. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 9 (4 body). Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{4x^2+13x-2}{x^3+3x^2-4x-12}$$

na parciální zlomky.

Příklad 10 (5 bodů). Vypočtěte

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{1+x^2}-x\right], \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2^x+\sqrt{1+x^2-21x^7+x^{10}}-8x^5+44x^2}{3^x+\sqrt[5]{6x^6+x^{23}}-18x^5-592x^4}.$$

Příklad 11 (2 body). Pro kladná x uveďte derivaci funkce $x^{\ln x}$.

Příklad 12 (4 body). Za pomoci diferenciálu přibližně určete $\sin\left(\frac{46}{180}\pi\right)$.

Příklad 13 (5 bodů). Vyšetřete průběh funkce $f(x) := (e^x-1)/(e^x+1)$. Tedy uveďte definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; určete body nespojitosti a jejich druh (pokud existují), nulové body (pokud existují) a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; a všechny asymptoty. Počítat hodnoty ve význačných bodech ani načrtávat graf nemusíte.

Pokud se již nudíte, zkuste se trošičku zamyslet a vyřešit níže uvedený příklad:

Příklad 14 (0 bodů). Napište 26. derivaci funkce

$$f(x) := \sin x + x^{23} - x^{18} + 15x^{11} - 13x^8 - 5x^4 - 11x^3 + 16 + e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

První test – skupina C

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také své UČO. Zlomte vaz!

Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí“ (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí“ (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte, tj. např. „1 platí, 3 a 4 neplatí“ – vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! (Uvědomte si, že matematická věta je pravdivá pouze tehdy, když platí za všech uvažovaných okolností: nesmí existovat ani jeden protipříklad.) Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte. Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů.

Tvrzení 1. Pro zcela libovolně dané navzájem různé body $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ a hodnoty $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ existuje nekonečně mnoho polynomů stupně nejvýše $n+1$ (tj. stupně $n+1$, nebo menšího), které v daných bodech nabývají uvedených hodnot (při zachování pořadí).

Tvrzení 2. Pro každé dva polynomy P, Q, přičemž Q není identicky roven nulovému polynomu a současně st $P <$ st Q, lze z nich složenou racionální ryze lomenou funkci $\frac{P}{Q}$ vyjádřit ve tvaru součtu parciálních zlomků, a to jednoznačně, tj. tento součet je určen jednoznačně až na pořadí jednotlivých zlomků.

Tvrzení 3. Nechť je zcela libovolně dán interval I. Je-li funkce f spojitá a rostoucí na I, potom je také inverzní funkce f^{-1} spojitá a rostoucí na $f(I)$.

Tvrzení 4. Součin směrnice tečny a směrnice normály (ke grafu nějaké diferencovatelné funkce v daném bodě) je vždy roven -1.

Tvrzení 5. Každá funkce f může mít nejvýše dvě asymptoty se směrnicí, zatímco pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje funkce f_n definovaná na $\mathbb{R}$, která má právě n asymptot bez směrnice.

Část II. (Celkem 5 bodů.)

Úloha 6 (1 bod). Uveďte větu O třech limitách (tzv. větu O třech policajtech).

Úloha 7 (2 body). Nalezněte všechny body nespojitosti funkcí

$$f(x) := \frac{e^x - 1}{x}, \quad g(x) := \frac{e^x - 1}{|\,x\,|}$$

s největším možným definičním oborem v $\mathbb{R}$ a určete, jakého jsou druhu: nespojitost odstranitelná, 1. druhu, či 2. druhu.

Úloha 8 (2 body). Udejte příklad dvou funkcí f a g, které nejsou diferencovatelné v žádném reálném bodě, ale jejich kompozice $f \circ g$ má derivaci na celé reálné přímce.

Část III. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 9 (4 body). Stanovte Hermitův interpolační polynom, je-li požadováno:

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \qquad y_0 = -11, \quad y_1 = 1, \quad y_0' = 12, \quad y_1' = 4.$$

Příklad 10 (5 bodů). Užitím l'Hospitalova pravidla doplňte

$$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)^{\sin x} = \dots, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \dots$$

Příklad 11 (5 bodů). Napište rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ v bodě $[1, 1]$.

Příklad 12 (4 body). Nalezněte všechna lokální maxima a minima funkce $f(x) := x \ln^2 x$ definované na intervalu $(0, \infty)$.

Příklad 13 (2 body). Určete Taylorův polynom se středem v počátku (tj. pro $x_0 = 0$) stupně alespoň 8 funkce e^{2x}.

Pokud se již nudíte, zkuste se trošičku zamyslet a vyřešit níže uvedený příklad:

Příklad 14 (0 bodů). Určete derivaci funkce

$$f(x) := \frac{(x+2)^3 \sqrt[3]{x-1}}{e^x (x+132)^2}$$

pro $x > 1$.