Druhý test – skupina A

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO. Zlomte vaz!

Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí" (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí" (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte. Vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte (neodpovídáte-li, bodový zisk či ztráta se nemění). Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů. Čtěte velmi pozorně!

Tvrzení 1. Existuje funkce definovaná na reálné přímce, která není spojitá alespoň v 1 bodě, přestože k ní existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí na celém $\mathbb{R}$.

Tvrzení 2. Pro každou funkci f spojitou na intervalu $I := [-1, 1]$ je dolní (Riemannův) integrál z f na I roven hornímu (Riemannově) integrálu z f na I.

Tvrzení 3. Nevlastní integrál $\int_0^{+\infty} x^{-2}\, dx$ konverguje.

Tvrzení 4. Nechť je dána konstanta $a \in (0, 1)$. Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = (1-a)^{-1} - 1$.

Tvrzení 5. Maclaurinovou (Taylorovou se středem $x_0 = 0$) řadou funkce $\sin x$ je řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/(2n)!$, která konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Výsledky 1–5. Odpověď za 5 bodů je

$$1, 2, 4 \text{ platí}, \quad 3, 5 \text{ neplatí}.$$

$\square$

Část II. (Celkem 5 bodů.)

Úloha 6 (2 body). Jsou-li f, g nenulové spojité funkce na $\mathbb{R}$, pro libovolné hodnoty $c, d \in \mathbb{R}$ vyčíslete integrál $\int_c^c f - g\,dx$ a rozdíl integrálů $\int_c^d f - g\,dx - \int_d^c g - f\,dx$.

Výsledek. Výsledkem je v obou případech 0. Viz skriptum doc. Hilschera, Poznámka 26, (iii). □

Úloha 7 (1 bod). Co znamená, že řada reálných čísel $\sum_{n=100}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje absolutně?

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, Definice 26. □

Úloha 8 (2 body). Udejte příklad nekonečné (číselné) řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, která osciluje, takové, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, kde $b_n = |\,a_n\,|$, diverguje k $+\infty$.

Výsledek. Uvažte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.$$

□

Část III. (Celkem 20 bodů.)

Z příkladů za 4 body počítáte nejvýše 2 dle vlastní volby: vyberete si 1, který neřešíte.

Příklad 9 (5 bodů). Spočtěte $\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$.

Výsledek. Platí

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \ln\left(|\,x-1\,|\,(x-2)^4\right) - \frac{8}{x-2} + x + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$. □

Příklad 10 (2 body). Vyčíslete $\int_{-1}^{1} |\, x \,|\, dx$. Přitom je vhodné uvážit geometrický význam určitého integrálu.

Výsledek. Výsledek je 1. □

Příklad 11 (4 body). Stanovte objem tělesa vzniklého otáčením ohraničené plochy vymezené grafy funkcí $f(x) = 2x - x^2$ a $g(x) \equiv 0$ okolo x-ové osy.

Výsledek. Objem tělesa činí $16\pi/15$. □

Příklad 12 (5 bodů). Rozhodněte, zda jednotlivé řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=21}^{\infty} (-1)^n \frac{n^8 - 5n^6 + 2n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

konvergují absolutně, konvergují neabsolutně (relativně), či divergují.

Výsledek. První dvě řady a čtvrtá řada konvergují absolutně, třetí relativně. □

Příklad 13 (4 body). Pro libovolné $a \in (-1, 1)$ sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a^n$.

Výsledek. Součet dané řady je

$$\frac{2a}{(1-a)^3}.$$

□

Příklad 14 (4 body). Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' \operatorname{cotg} x + y = 2$, které splňuje podmínku $y(0) = -1$.

Výsledek. Hledané partikulární řešení je $y = 2 - 3\cos x$. □

Druhý test – skupina B

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO. Zlomte vaz!

Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí“ (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí“ (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte. Vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte (neodpovídáte-li, bodový zisk či ztráta se nemění). Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů. Čtěte velmi pozorně!

Tvrzení 1. Je-li $a > 0$, pak je $\int a^x \, dx = a^x \ln a + c$, $x, c \in \mathbb{R}$.

Tvrzení 2. Součtem, rozdílem, součinem i podílem libovolných dvou funkcí integrovatelných na $\mathbb{R}$ je ve všech případech funkce integrovatelná na $\mathbb{R}$.

Tvrzení 3. Pro každé dvě relativně konvergentní řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ platí rovnost $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - 2b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - 2\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Tvrzení 4. Jestliže pro libovolnou číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 0$, pak tato řada konverguje.

Tvrzení 5. Platí

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p} (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{p} \quad \text{pro všechna } p \in \mathbb{N}.$$

Výsledky 1–5. Odpověď za 5 bodů je

$$1, 2, 4 \text{ neplatí}, \quad 3, 5 \text{ platí}.$$

□

Část II. (Celkem 5 bodů.)

Úloha 6 (1 bod). Zaveďte (tak, jak je obvyklé) průměrnou (střední) hodnotu $av(f) = av_{[-1,1]}(f)$ funkce f na intervalu $[-1, 1]$ za předpokladu, že f je na tomto intervalu spojitá.

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, Definice 21. □

Úloha 7 (2 body). Vyjádřete bez symbolů derivace a integrace výraz

$$\left(\int_{x^2}^{a} 3\,t^2 \cos t \, dt\right)'$$

s proměnnou $x \in \mathbb{R}$ a reálnou konstantou a, je-li derivováno podle x.

Výsledek. Platí

$$\left(\int\limits_{x^2}^{a} 3\,t^2 \cos t \, dt\right)' = -6\,x^5 \cos x^2.$$

Viz skriptum doc. Hilschera, podkapitola 3.7. □

Úloha 8 (2 body). Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy taková, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Uveďte pro tuto řadu tzv. podílové kritérium (konvergence i divergence). Poté aplikujte toto kritérium na Vámi libovolně zvolenou řadu, tj. užitím tohoto kritéria rozhodněte o konvergenci (či divergenci) nějaké řady.

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, podkapitola 4.2, Věta 44, Příklad 142. □

Část III. (Celkem 20 bodů.)

Z příkladů za 4 body počítáte nejvýše 2 dle vlastní volby: vyberete si 1, který neřešíte.

Příklad 9 (2 body). Určete $\int 4/(x^2 - 2x + 3)\, dx$.

Výsledek. Dle známého vzorce je ($C \in \mathbb{R}$)

$$\int \frac{4}{x^2 - 2x + 3}\, dx = \int \frac{4}{(x-1)^2 + 2}\, dx = 2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\, \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

□

Příklad 10 (4 body). Vypočtěte $\int_{-1}^{1} x^2\, e^{-x}\, dx$.

Výsledek. Výsledek je $e - 5e^{-1}$. (Uvažte metodu per partes.) □

Příklad 11 (5 bodů). Vyčíslete

$$\int_{-\infty}^{0} x\, e^{-x^2}\, dx, \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\, dx.$$

Výsledek. Užitím 1. substituční metody můžeme obdržet

$$\int\limits_{-\infty}^{0} x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}, \qquad \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\, dx = 1.$$

□

Příklad 12 (5 bodů). Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 + 3n)$.

Výsledek. Součet uvažované řady je $s = 11/18$. □

Příklad 13 (4 body). Rozviňte funkci $f(x) := \ln(1+x) - \ln(1-x)$ definovanou na intervalu $(-1, 1)$ do Maclaurinovy řady, tj. Taylorovy řady se středem v počátku.

Výsledek. Platí

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

pro $x \in (-1, 1)$. $\square$

Příklad 14 (4 body). Vyřešte diferenciální rovnici $x^2 y' = 1 - y$.

Výsledek. Výsledek je $(c \in \mathbb{R})$
$$y = 1 - c\, e^{\frac{1}{x}}.$$
$\square$

Druhý test – skupina C

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO. Zlomte vaz!

Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí“ (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí“ (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte. Vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte (neodpovídáte-li, bodový zisk či ztráta se nemění). Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů. Čtěte velmi pozorně!

Tvrzení 1. Jsou-li funkce f, g primitivními funkcemi stejné funkce h na intervalu $(-2, 2)$, je nutně $av_{[0,1]}(f - g) = 0$.

Tvrzení 2. Nerovnost $\int_1^0 |\, p(x)\,|\, dx < 0$ má smysl a je splněna pro všechny polynomy p různé od identicky nulové funkce.

Tvrzení 3. Položíme-li $\tilde{f}(x) := \int_0^x f(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$ pro libovolnou funkci f integrovatelnou na každém ohraničeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, obdržíme funkci $\tilde{f}$ spojitou na celém $\mathbb{R}$.

Tvrzení 4. Pro jakákoliv záporná reálná čísla a_n $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ platí, že z konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ plyne konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} |\, a_n\,|$.

Tvrzení 5. Uvažujte libovolnou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Jestliže existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n / a_{n+1}$ a je rovna $a \in (0, +\infty)$, pak poloměr konvergence dané mocninné řady R splňuje nerovnost $R \geq 1/a$.

Výsledky 1–5. Odpověď za 5 bodů je

$$2, 3, 4 \text{ platí}, \quad 1, 5 \text{ neplatí}.$$

□

Část II. (Celkem 5 bodů.)

Úloha 6 (1 bod). Nechť derivace funkcí $u(x)$, $v(x)$ jsou spojitými funkcemi na intervalu $[a, b]$, kde $a < b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Uveďte metodu per partes pro *určitý* integrál (s mezemi a, b).

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, Věta 38. □

Úloha 7 (2 body). Napište vzorce pro objem a obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací plochy mezi Gr f a osou x na intervalu $[a, b]$ kolem osy x, je-li f nezápornou funkcí se spojitou derivací na $[a, b]$ pro čísla $a, b \in \mathbb{R}$ splňující $a < b$.

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, Tvrzení 8, Tvrzení 9. □

Úloha 8 (2 body). Polynom $a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ zadaný libovolnými reálnými čísly $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, z nichž pouze konečně mnoho je nenulových, vyjádřete ve tvaru Maclaurinova rozvoje $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n x^n$ (tj. Taylorovy řady se středem v počátku). Tedy určete všechna $\xi_n \in \mathbb{R}$ pomocí hodnot a_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

Výsledek. Zjevně je $\xi_n = a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

Část III. (Celkem 20 bodů.)

Z příkladů za 4 body počítáte nejvýše 2 dle vlastní volby: vyberete si 1, který neřešíte.

Příklad 9 (4 body). Užitím vhodné metody určete $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\, dx$.

Výsledek. Platí, že $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\, dx = 2 - \frac{2}{e}$. □

Příklad 10 (5 bodů). Vypočtěte délku grafu funkce $f(x) = \ln(1 - x^2)$ na intervalu $[0, 1/2]$.

Výsledek. Výsledek je
$$d = \ln 3 - \frac{1}{2}.$$
□

Příklad 11 (2 body). Napište součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot 3^{-n}$.

Výsledek. Dosazením do vzorce pro součet geometrické řady lze obdržet
$$\sum_{n=0}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{15}{2}.$$
□

Příklad 12 (5 bodů). Stanovte všechny hodnoty parametrů $A, B \in \mathbb{R}$, pro které řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{A^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sin \frac{B}{n}\right)^n$$
(relativně) konvergují.

Výsledek. Dané řady konvergují právě pro hodnoty $A \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ a pro všechna $B \in \mathbb{R}$. □

Příklad 13 (4 body). Určete poloměr konvergence r a obor konvergence mocninné řady
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}\, n!}{(2n)!}\, x^n.$$

Výsledek. Je $r = +\infty$, tj. oborem konvergence je celá reálná přímka. □

Příklad 14 (4 body). Vyřešte diferenciální rovnici $y' + (y-1)\mathrm{tg}\, x = 0$.

Výsledek. Výsledek je ($c \in \mathbb{R}$)

$$y = c\,\cos x + 1.$$

$\square$