

Druhý test – skupina A

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO. Zlomte vaz!

Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí“ (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí“ (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte. Vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte (neodpovídáte-li, bodový zisk či ztráta se nemění). Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů. Čtěte velmi pozorně!

Tvrzení 1. Existuje funkce definovaná na reálné přímce, která není spojitá alespoň v 1 bodě, přestože k ní existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí na celém \mathbb{R} .

Tvrzení 2. Pro každou funkci f spojitou na intervalu $I := [-1, 1]$ je dolní (Riemannův) integrál z f na I roven hornímu (Riemannově) integrálu z f na I .

Tvrzení 3. Nevlastní integrál $\int_0^{+\infty} x^{-2} dx$ konverguje.

Tvrzení 4. Nechť je dána konstanta $a \in (0, 1)$. Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = (1 - a)^{-1} - 1$.

Tvrzení 5. Maclaurinovou (Taylorovou se středem $x_0 = 0$) řadou funkce $\sin x$ je řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

kteřá konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Část II. (Celkem 5 bodů.)

Úloha 6 (2 body). Jsou-li f, g nenulové spojitě funkce na \mathbb{R} , pro libovolné hodnoty $c, d \in \mathbb{R}$ vyčíslíte integrál $\int_c^d f - g dx$ a rozdíl integrálů $\int_c^d f - g dx - \int_d^c g - f dx$.

Úloha 7 (1 bod). Co znamená, že řada reálných čísel $\sum_{n=100}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje absolutně?

Úloha 8 (2 body). Udejte příklad nekonečné (číselné) řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, která osciluje, takové, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, kde $b_n = |a_n|$, diverguje k $+\infty$.

Část III. (Celkem 20 bodů.)

Z příkladů za 4 body počítáte nejvýše 2 dle vlastní volby: vyberete si 1, který neřešíte.

Příklad 9 (5 bodů). Spočtěte

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)^2} dx.$$

Příklad 10 (2 body). Vyčíslete $\int_{-1}^1 |x| dx$. Přitom je vhodné uvážit geometrický význam určitého integrálu.

Příklad 11 (4 body). Stanovte objem tělesa vzniklého otáčením ohraničené plochy vymezené grafy funkcí $f(x) = 2x - x^2$ a $g(x) \equiv 0$ okolo x -ové osy.

Příklad 12 (5 bodů). Rozhodněte, zda jednotlivé řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=21}^{\infty} (-1)^n \frac{n^8 - 5n^6 + 2n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

konvergují absolutně, konvergují neabsolutně (relativně), či divergují.

Příklad 13 (4 body). Pro libovolné $a \in (-1, 1)$ sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a^n.$$

Příklad 14 (4 body). Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y' \cotg x + y = 2,$$

ktelé splňuje podmínku $y(0) = -1$.

Druhý test – skupina B

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO. Zlomte vaz!

Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí“ (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí“ (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte. Vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte (neodpovídáte-li, bodový zisk či ztráta se nemění). Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů. Čtěte velmi pozorně!

Tvrzení 1. Je-li $a > 0$, pak je $\int a^x dx = a^x \ln a + c$, $x, c \in \mathbb{R}$.

Tvrzení 2. Součtem, rozdílem, součinem i podílem libovolných dvou funkcí integrovatelných na \mathbb{R} je ve všech případech funkce integrovatelná na \mathbb{R} .

Tvrzení 3. Pro každé dvě relativně konvergentní řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ platí rovnost $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - 2b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Tvrzení 4. Jestliže pro libovolnou číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$, pak tato řada konverguje.

Tvrzení 5. Platí

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^p (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{p} \quad \text{pro všechna } p \in \mathbb{N}.$$

Část II. (Celkem 5 bodů.)

Úloha 6 (1 bod). Zaveďte (tak, jak je obvyklé) průměrnou (střední) hodnotu $av(f) = av_{[-1,1]}(f)$ funkce f na intervalu $[-1, 1]$ za předpokladu, že f je na tomto intervalu spojitá.

Úloha 7 (2 body). Vyjádřete bez symbolů derivace a integrace výraz

$$\left(\int_{x^2}^a 3t^2 \cos t \, dt \right)'$$

s proměnnou $x \in \mathbb{R}$ a reálnou konstantou a , je-li derivováno podle x .

Úloha 8 (2 body). Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy taková, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n$. Uveďte pro tuto řadu tzv. podílové kritérium (konvergence i divergence). Poté aplikujte toto kritérium na Vámi libovolně zvolenou řadu, tj. užitím tohoto kritéria rozhodněte o konvergenci (či divergenci) nějaké řady.

Část III. (Celkem 20 bodů.)

Z příkladů za 4 body počítáte nejvýše 2 dle vlastní volby: vyberete si 1, který neřešíte.

Příklad 9 (2 body). Určete

$$\int \frac{4}{x^2 - 2x + 3} dx.$$

Příklad 10 (4 body). Vypočtete $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$.

Příklad 11 (5 bodů). Vyčíslete

$$\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$$

Příklad 12 (5 bodů). Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}.$$

Příklad 13 (4 body). Rozviňte funkci $f(x) := \ln(1+x) - \ln(1-x)$ definovanou na intervalu $(-1, 1)$ do Maclaurinovy řady, tj. Taylorovy řady se středem v počátku.

Příklad 14 (4 body). Vyřešte diferenciální rovnici $x^2 y' = 1 - y$.

Druhý test – skupina C

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO. Zlomte vaz!

Část I. (Celkem 5 bodů.)

Rozhodněte o pravdivosti 5 níže uvedených výroků. U jednotlivých tvrzení uvádíte *pouze* „platí“ (pravda; ano, je to tak), nebo „neplatí“ (lež; ne, není to tak), případně neodpovídáte. Vysvětlování a komentáře jsou zcela zbytečné! Za správnou odpověď získáváte 1 bod, za špatnou se Vám 1 bod odečte (neodpovídáte-li, bodový zisk či ztráta se nemění). Celkem nemůžete za Část I získat záporný počet bodů. Čtěte velmi pozorně!

Tvrzení 1. Jsou-li funkce f, g primitivními funkcemi stejné funkce h na intervalu $(-2, 2)$, je nutně $av_{[0,1]}(f - g) = 0$.

Tvrzení 2. Nerovnost $\int_1^0 |p(x)| dx < 0$ má smysl a je splněna pro všechny polynomy p různé od identicky nulové funkce.

Tvrzení 3. Položíme-li $\tilde{f}(x) := \int_0^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$ pro libovolnou funkci f integrovatelnou na každém ohraničeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, obdržíme funkci \tilde{f} spojitou na \mathbb{R} .

Tvrzení 4. Pro jakákoliv záporná reálná čísla a_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) platí, že z konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ plyne konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Tvrzení 5. Uvažujte libovolnou mocninou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Jestliže existuje vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/a_{n+1}$ a je rovna $a \in (0, +\infty)$, pak poloměr konvergence dané mocninné řady R splňuje nerovnost $R \geq 1/a$.

Část II. (Celkem 5 bodů.)

Úloha 6 (1 bod). Nechť derivace funkcí $u(x)$, $v(x)$ jsou spojitými funkcemi na intervalu $[a, b]$, kde $a < b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Uveďte metodu per partes pro *určitý* integrál (s mezelemi a, b).

Úloha 7 (2 body). Napište vzorce pro objem a obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací plochy mezi Gr f a osou x na intervalu $[a, b]$ kolem osy x , je-li f nezápornou funkcí se spojitou derivací na $[a, b]$ pro čísla $a, b \in \mathbb{R}$ splňující $a < b$.

Úloha 8 (2 body). Polynom $a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ zadaný libovolnými reálnými čísly $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, z nichž pouze konečně mnoho je nenulových, vyjádřete ve tvaru Maclaurinova rozvoje $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n x^n$ (tj. Taylorovy řady se středem v počátku). Tedy určete všechna $\xi_n \in \mathbb{R}$ pomocí hodnot a_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

Část III. (Celkem 20 bodů.)

Z příkladů za 4 body počítáte nejvýše 2 dle vlastní volby: vyberete si 1, který neřešíte.

Příklad 9 (4 body). Užitím vhodné metody určete

$$\int_{1/e}^e |\ln x| dx.$$

Příklad 10 (5 bodů). Vypočtěte délku grafu funkce $f(x) = \ln(1 - x^2)$ na intervalu $[0, 1/2]$.

Příklad 11 (2 body). Napište součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot 3^{-n}$.

Příklad 12 (5 bodů). Stanovte všechny hodnoty parametrů $A, B \in \mathbb{R}$, pro které řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{A^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sin \frac{B}{n} \right)^n$$

(relativně) konvergují.

Příklad 13 (4 body). Určete poloměr konvergence r a obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n)!} x^n.$$

Příklad 14 (4 body). Vyřešte diferenciální rovnici $y' + (y - 1)\operatorname{tg} x = 0$.