Dodatečný zápočtový test – skupina A

Zadání Vám zůstává. Odevzdáváte pouze přiložený list, kde pouze vyplníte: Vaše jméno, UČO a za pod sebou napsaná čísla $1, 2, \ldots, 14, 15$ uvedete výsledky příslušných příkladů, tj. Vaše odpovědi v podobě osamoceného (nejvýše jednoho) výsledku bez jakýchkoli komentářů či poznámek! (Tři příklady budou uvedeny na tabuli.) Pokud jste nějaký příklad neřešili, odpovídající řádek proškrtněte. Poté se podepište!

Počítat máte nejvýše 12 příkladů dle vlastní volby! Tedy alespoň tři řádky musíte proškrtnout!

Příklad 1 (5 bodů). Nalezněte polynom nejvýše třetího stupně, který v bodech 1 a -1 nabývá shodně hodnoty 6 a jenž má v bodě 1 a zároveň v bodě -1 derivaci rovnu 2.

Výsledek. Hledaným polynomem je

$$x^3 - x + 6.$$

$\square$

Příklad 2 (5 bodů). Vyjádřete racionální ryze lomenou funkci

$$\frac{-5x+2}{x^4 - x^3 + 2x^2}$$

ve tvaru součtu parciálních zlomků.

Výsledek. Platí

$$\frac{-5x+2}{x^4 - x^3 + 2x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x^2 - x + 2}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$

Příklad 3 (5 bodů). Nechť je dána funkce

$$f(x) := 2 \operatorname{arctg} \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right|$$

definovaná pro reálná $x \neq \pm 1$. Uveďte všechny její body nespojitosti, včetně jejich druhu.

Výsledek. Funkce f má 2 body nespojitosti, a to $x = -1$, $x = 1$. V obou případech se jedná o odstranitelnou nespojitost. $\square$

Příklad 4 (5 bodů). Např. užitím Maclaurinova polynomu nebo l'Hospitalova pravidla vypočtěte

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Výsledek. Trojím použitím l'Hospitalova pravidla lze obdržet

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

$\square$

Příklad 5 (5 bodů). Opět uvažujte funkci $f(x) = 2 \operatorname{arctg} |\, x/(x^2 - 1) \,|$, $x \neq \pm 1$, $x \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechny její asymptoty.

Výsledek. Funkce f má pouze jednu asymptotu, a to přímku $y = 0$ (pro $x \to \pm\infty$). $\square$

Příklad 6 (5 bodů). Určete $\int x^2 \sin x \, dx$.

Výsledek. Metodou per partes lze dokázat, že

$$\int x^2 \sin x \, dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Příklad 7 (5 bodů). Vyčíslete $\int_1^2 x/\sqrt{1 + x^2} \, dx$.

Výsledek. Položením $t = 1 + x^2$ ($x \, dx = 1/2 \, dt$ a transformací mezí 1, 2 na 2, 5) lze získat $\int_1^2 x/\sqrt{1 + x^2} \, dx = \sqrt{5} - \sqrt{2}$. $\square$

Příklad 8 (5 bodů). Spočtěte $\int_{-\infty}^{+\infty} 1/(x^2 + x + 1) \, dx$.

Výsledek. Je

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi.$$

$\square$

Příklad 9 (5 bodů). Stanovte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)/2^n$.

Výsledek. Platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3.$$

$\square$

Příklad 10 (5 bodů). Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada $\sum_{n=20}^{\infty} e^{nx}/n$ absolutně konverguje.

Výsledek. Daná řada absolutně konverguje právě pro záporná x. $\square$

Příklad 11 (5 bodů). Najděte mocninný rozvoj se středem v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$\int_0^x e^{\left(t^2\right)}\, dt.$$

Výsledek. Lze dokázat

$$\int\limits_0^x e^{\left(t^2\right)}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Příklad 12 (5 bodů). Nalezněte řešení rovnice $y' + 2xy = xe^{(-x^2)}$, které v bodě $x_0 = 0$ nabývá hodnoty $y_0 = 5$.

Výsledek. Řešeními zadané diferenciální rovnice jsou funkce

$$y = c\,e^{-x^2} + \frac{x^2}{2}\,e^{-x^2}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

tedy výsledek je

$$y = 5\,e^{-x^2} + \frac{x^2}{2}\,e^{-x^2}.$$

$\square$

Dodatečný zápočtový test – skupina B

Zadání Vám zůstává. Odevzdáváte pouze přiložený list, kde pouze vyplníte: Vaše jméno, UČO a za pod sebou napsaná čísla $1, 2, \ldots, 14, 15$ uvedete výsledky příslušných příkladů, tj. Vaše odpovědi v podobě osamoceného (nejvýše jednoho) výsledku bez jakýchkoli komentářů či poznámek! (Tři příklady budou uvedeny na tabuli.) Pokud jste nějaký příklad neřešili, odpovídající řádek proškrtněte. Poté se podepište!

Počítat máte nejvýše 12 příkladů dle vlastní volby! Tedy alespoň tři řádky musíte proškrtnout!

Příklad 1 (5 bodů). Sestrojte přirozený kubický interpolační splajn pro body $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$ a hodnoty $y_0 = y_1 = y_2 = 1$.

Výsledek. Výsledkem jsou očividně polynomy

$$S_1(x) \equiv 1, \quad S_2(x) \equiv 1.$$

□

Příklad 2 (5 bodů). Stanovte

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

Výsledek. Platí

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x} = 1.$$

□

Příklad 3 (5 bodů). Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ derivujte $x\sqrt{1+x^2} + e^x(x^2 - 2x + 2)$.

Výsledek. Je

$$\left(x\sqrt{1+x^2} + e^x(x^2-2x+2)\right)' = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} + e^x\, x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

Příklad 4 (5 bodů). Napište rovnici normály ke grafu funkce $1 - e^{x/2}$ v bodě, který je průsečíkem tohoto grafu s osou x.

Výsledek. Výsledkem je přímka $y = 2x$. $\square$

Příklad 5 (5 bodů). Uveďte Taylorův polynom čtvrtého stupně funkce $e^{-x^2/2}$ v bodě $x_0 = 0$.

Výsledek. Korektní náhradou $-\frac{x^2}{2}$ za x ve známém vzorci

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$

lze snadno získat výsledek

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}.$$

$\square$

Příklad 6 (5 bodů). Vypočtěte $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Výsledek. Platí (kde $C \in \mathbb{R}$)

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + 1 \right| + C,$$

což lze dokázat metodou per partes. $\square$

Příklad 7 (5 bodů). Vyčíslete $\int_{-1}^{1} x/\sqrt{5-4x} \, dx$ za pomoci 2. substituční metody.

Výsledek. Volbou substituce $t = \sqrt{5-4x}$, kdy $dx = -t/2 \, dt$, lze dostat

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \, dx = \frac{1}{8} \int_{3}^{1} t^2 - 5 \, dt = \frac{1}{6}.$$

$\square$

Příklad 8 (5 bodů). Zjistěte obsah ohraničeného rovinného obrazce vymezeného částmi křivek $y = x^2 + 2x - 3$, $y = 0$.

Výsledek. Výsledek je 32/3. $\square$

Příklad 9 (5 bodů). Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + 2^n)/6^n$.

Výsledek. Je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \frac{3}{2}.$$

$\square$

Příklad 10 (5 bodů). Určete poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5x^{n-1}}{n3^{n-1}}.$$

Výsledek. Poloměrem konvergence dané řady je 3. $\square$

Příklad 11 (5 bodů). Stanovte součet číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ pomocí součtu vhodné mocninné řady.

Výsledek. Součet řady je roven $\ln(3/2)$. $\square$

Příklad 12 (5 bodů). Vyřešte diferenciální rovnici $y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, přičemž nemusíte uvádět singulární řešení.

Výsledek. Výsledek je ($c \in \mathbb{R}$)

$$\sin \frac{y}{x} - cx = 0.$$

$\square$