Písemná zkouška z MB102 – 10. 1. 2008

Část I. (Celkem 9 bodů.)

Část I. A. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 1. Pro libovolnou neprázdnou shora ohraničenou množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ je $\sup M$ prvkem množiny M, právě když existuje $x \in M$ takové, že $x \geq m$ pro každé $m \in M$.

Tvrzení 2. Nerovnost $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq 0$ má smysl a je splněna pro libovolnou lichou funkci, která je spojitá na intervalu $[-1,1]$.

Tvrzení 3. Poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!}\, x^{2n+3}$$

je roven $+\infty$.

Část I. B. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 4. Alespoň jeden reálný kořen polynomu

$$x^{44} + 5x^{32} - 4x^{9} + 5x^{4} - 2x - 3$$

leží v intervalu $(-1,1)$.

Tvrzení 5. K funkci $f(x) = |\,x\,|^3$, $x \in \mathbb{R}$ neexistuje na $\mathbb{R}$ ani jedna primitivní funkce.

Tvrzení 6. Nechť je dána funkce F, která je spojitá na $\mathbb{R}^2$. Pak má počáteční úloha $y' = F(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ alespoň jedno řešení pro libovolná $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Část I. C. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 7. Existují reálné funkce f, g definované pro $x \geq 0$ takové, že je

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \quad \text{a zároveň je} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = 1.$$

Tvrzení 8. Nechť je dán interval $I = [a,b]$, přičemž $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Potom každá funkce integrovatelná na I nabývá své průměrné hodnoty na I v nějakém bodě tohoto intervalu, tj. existuje $c \in [a,b]$ takové, že

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tvrzení 9. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+2}} = \frac{1}{12}.$$

Výsledky Tvrzení 1–9. Správné odpovědi jsou

$$1, 2, 3, 4, 6, 9 \text{ platí}; \quad 5, 7, 8 \text{ neplatí}.$$

$\square$

Část II. (Celkem 11 bodů.)

Úloha 10 (2 body). Jaká je *definice* Lagrangeova interpolačního polynomu, jsou-li zadány (funkční) hodnoty $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ v navzájem různých bodech $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$?

Výsledek. Viz str. 2–3 ve skriptu doc. Hilschera. $\square$

Úloha 11 (2 body). Udejte příklad funkce g definované na celé reálné ose a spojité ve všech reálných bodech s výjimkou bodů $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, přičemž v bodě x_0 má odstranitelnou nespojitost, v bodě x_1 nastává skok a v bodě x_2 má nespojitost druhého druhu.

Výsledek. Nechť např.

$$g(x) := 0, \qquad x \in (-\infty, 0] \setminus \{-1\};$$

$$g(x) := 1, \qquad x \in (0, 1] \cup \{-1\};$$

$$g(x) := \frac{1}{x-1}, \qquad x \in (1, +\infty).$$

$\square$

Úloha 12 (1 bod). Uveďte Lagrangeovu větu pro funkci f se spojitou derivací na intervalu $[-10, 10]$.

Výsledek. Viz podkapitolu 2.10 ve skriptu doc. Hilschera. $\square$

Úloha 13 (1 bod). Napište metodu per partes pro neurčitý integrál.

Výsledek. Viz větu označenou jako „Metoda per-partes pro neurčitý integrál“ v úvodu podkapitoly 3.2 ve skriptu doc. Hilschera. $\square$

Úloha 14 (2 body). Rozhodněte, které z těchto tří čísel (hodnot integrálů)

$$\int_{2}^{-2} |\, x-1 \,|\, dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin\, x\, dx, \qquad \int_{0}^{1} \frac{\cos\, x}{x}\, dx$$

je největší a které nejmenší.

Výsledek. Zjevně je

$$\int_{2}^{-2} |\, x-1 \,|\, dx < \int_{-\pi}^{\pi} \sin\, x\, dx = 0 < \int_{0}^{1} \frac{\cos\, x}{x}\, dx.$$

$\square$

Úloha 15 (3 body). Uveďte integrální kritérium pro zjištění konvergence (divergence) číselných řad s nezápornými členy. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ konverguje?

Výsledek. Viz větu nazvanou „Integrální kritérium“ v podkapitole 4.2 ve skriptu doc. Hilschera. Uvedená řada konverguje právě pro $\alpha > 1$. $\square$

Část III. (Celkem 10 bodů.)

Doplňme, že vyšetřením průběhu funkce f v níže uvedeném příkladu se rozumí „udat definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; určit body nespojitosti a jejich druh včetně příslušných jednostranných limit (pokud existují), nulové body (pokud existují) a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná; stanovit první (a druhou, je-li potřeba) derivaci; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; všechny asymptoty; vypočítat hodnoty ve význačných bodech (tím se rozumí vyčíslit funkci ve stacionárních a v inflexních bodech a nalézt průsečíky s osami, existují-li); načrtnout její graf“.

Příklad 16 (10 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{\ln x^2}{x}.$$

Výsledek. Zadaná funkce je definována i spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Je lichá; není sudá ani periodická. Je kladná právě na intervalech $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$. V počátku má nespojitost druhého druhu a oborem hodnot f je $\mathbb{R}$, neboť průsečíky Gr f s osami jsou body $[-1, 0]$, $[1, 0]$ a neboť

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty.$$

Lehce lze ukázat, že

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f''(x) = \frac{2\,(\ln x^2 - 3)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Stacionárními body jsou $\pm e$. Funkce f roste na intervalech $[-e, 0)$, $(0, e]$; klesá na intervalech $(-\infty, -e]$, $[e, +\infty)$. V bodě $x = -e$ má tudíž lokální minimum $y = -2/e$; v bodě $x = e$ lokální maximum $y = 2/e$. Je konvexní na intervalech $[-\sqrt{e^3}, 0)$, $[\sqrt{e^3}, +\infty)$; konkávní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{e^3}]$, $(0, \sqrt{e^3}]$. Proto oba nulové body $\pm\sqrt{e^3}$ druhé derivace funkce f jsou jejími inflexními body, přičemž

$$f\left(-\sqrt{e^3}\right) = -\frac{3}{\sqrt{e^3}}, \qquad f\left(\sqrt{e^3}\right) = \frac{3}{\sqrt{e^3}}.$$

Asymptotou bez směrnice je přímka $x = 0$ (v bodě 0); přímka $y = 0$ je potom asymptotou se směrnicí v $\pm\infty$, tj. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. □

Část IV. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 17 (3 body). Napište rovnici tečny ke grafu funkce

$$f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + x^x, \qquad x > 0$$

v bodě $[1, 2]$.

Výsledek. Protože

$$f'(x) = \frac{7}{8}\, x^{-\frac{1}{8}} + x^x\,(\ln x + 1) \quad \text{pro všechna } x > 0,$$

je rovnice tečny

$$y - 2 = \frac{15}{8}\,(x - 1).$$

□

Příklad 18 (4 body). Najděte Taylorův polynom stupně 3 (tedy polynom stupně nejvýše 3) funkce $f(x) = x^2 \cos(x^2)$ se středem v bodě $x_0 = 0$. Poté vypočtěte

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - x^2}{x^3}.$$

Nápověda: Lze např. využít vyjádření funkce f ve tvaru Maclaurinova rozvoje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

Výsledek. Příslušný Taylorův polynom je x^2, neboť platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{x^{4n+2}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Odtud rovněž získáváme

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - x^2}{x^3} = 0.$$

□

Příklad 19 (3 body). Spočítejte

$$\int \left(\frac{e^x}{e^{2x} + 3} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx.$$

Výsledek. Je

$$\int \left(\frac{e^x}{e^{2x}+3} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\, e^x}{3} + \operatorname{tg} x + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Uvažte substituci $t = e^x$. □

Příklad 20 (3 body). Vyčíslete

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}.$$

Výsledek. Rozkladem na parciální zlomky pro $x \in [1, +\infty)$ dostáváme

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{-x}{x^2+1} + \frac{1}{x}.$$

Integrováním lze pak obdržet výsledek

$$\frac{\ln 2}{2}.$$

□

Příklad 21 (3 body). Určete pro jaké hodnoty parametru $\beta \in \mathbb{R}$ absolutně konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{\beta n}}{\sqrt{3n^3+113} + 3n^3 + 111}.$$

Výsledek. Daná řada konverguje absolutně právě pro $\beta \leq 0$. □

Příklad 22 (4 body). Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}\, y = 1.$$

Poté nalezněte řešení splňující podmínku $y(1) = 1$.

Výsledek. Řešeními dané rovnice jsou funkce

$$C\,x^2\,e^{\frac{1}{x}} + x^2 \qquad \text{pro } C \in \mathbb{R}.$$

Tudíž partikulárním řešením splňujícím podmínku $y(1) = 1$ je

$$y(x) = x^2.$$

□

Část V. (Celkem 10 bodů za 2 příklady ze 3.)

Příklad 23 (5 bodů). Mezi obdélníky, jejichž dva vrcholy leží na ose x a další dva (s kladnými druhými souřadnicemi, tj. nad osou x) na parabole $y = 8 - 2x^2$, najděte obdélník s maximálním obsahem. Uveďte délky jeho stran.

Výsledek. Základna obdélníku s maximálním obsahem měří $4/\sqrt{3}$; jeho výška pak $16/3$. To lze ukázat nalezením globálního maxima funkce $x\,(8 - 2x^2)$ na intervalu $I = [0, 2]$. Neboť tato funkce je na I spojitá, nezáporná, v krajních bodech I nulová a má derivaci na celém I, přičemž její derivace je nulová pouze v jednom bodě, a to v bodě $2/\sqrt{3}$, nabývá zde maximální hodnoty. □

Příklad 24 (5 bodů). Vypočítejte délku grafu funkce $\ln(1 - x^2)$ na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$.

Výsledek. Délka grafu zadané funkce na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$ je

$$\ln 3 - \frac{1}{2}.$$

□

Příklad 25 (5 bodů). Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(-2)^{n-1}}$$

pomocí součtu mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(2n+1)\,x^{2n}$ pro $|\,x\,| < 1$.

Výsledek. Z rovnosti

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(2n+1)\,x^{2n}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\qquad\text{pro }|\,x\,|<1$$

volbou $x=\sqrt{2}/2=1/\sqrt{2}$ vyplývá

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(-2)^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(2n+1)\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\frac{2}{9}.$$

$\square$