Písemná zkouška z MB102 – 10. 1. 2008 – TEORIE

Zadání si ponecháváte. Odevzdáváte pouze (řádně vyplněný) přiložený list.

Část I. (Celkem 9 bodů.)

Ohledně instrukcí viz(te) přiložený list!

Část I. A. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 1. Pro libovolnou neprázdnou shora ohraničenou množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ je $\sup M$ prvkem množiny M, právě když existuje $x \in M$ takové, že $x \geq m$ pro každé $m \in M$.

Tvrzení 2. Nerovnost $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq 0$ má smysl a je splněna pro libovolnou lichou funkci, která je spojitá na intervalu $[-1,1]$.

Tvrzení 3. Poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!}\, x^{2n+3}$$

je roven $+\infty$.

Část I. B. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 4. Alespoň jeden reálný kořen polynomu

$$x^{44} + 5x^{32} - 4x^{9} + 5x^{4} - 2x - 3$$

leží v intervalu $(-1,1)$.

Tvrzení 5. K funkci $f(x) := |\,x\,|^3$, $x \in \mathbb{R}$ neexistuje na $\mathbb{R}$ ani jedna primitivní funkce.

Tvrzení 6. Nechť je dána funkce F, která je spojitá na $\mathbb{R}^2$. Každá diferenciální rovnice prvního řádu $y' = F(x,y)$ opatřená počáteční podmínkou, tj. každá počáteční úloha každé diferenciální rovnice $y' = F(x,y)$, má alespoň jedno řešení.

Část I. C. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 7. Existují reálné funkce f, g definované pro $x \geq 0$ takové, že je

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \quad \text{a zároveň je} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = 1.$$

Tvrzení 8. Nechť je dán interval $I = [a, b]$, přičemž $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Potom každá funkce integrovatelná na I nabývá své průměrné hodnoty na I v nějakém bodě tohoto intervalu, tj. existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Tvrzení 9. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+2}} = \frac{1}{12}.$$

Část II. (Celkem 11 bodů.)

Úloha 10 (2 body). Jaká je *definice* Lagrangeova interpolačního polynomu, jsou-li zadány (funkční) hodnoty $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ v navzájem různých bodech $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$?

Úloha 11 (2 body). Udejte příklad funkce g definované na celé reálné ose a spojité ve všech reálných bodech s výjimkou bodů $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, přičemž v bodě x_0 má odstranitelnou nespojitost, v bodě x_1 nastává skok a v bodě x_2 má nespojitost druhého druhu.

Úloha 12 (1 bod). Uveďte Lagrangeovu větu pro funkci f se spojitou derivací na intervalu $[-10, 10]$.

Úloha 13 (1 bod). Napište metodu per partes pro neurčitý integrál.

Úloha 14 (2 body). Rozhodněte, které z těchto tří čísel (hodnot integrálů)

$$\int_2^{-2} |\, x - 1\,|\, dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\cos x}{x}\, dx$$

je největší a které nejmenší.

Úloha 15 (3 body). Uveďte integrální kritérium pro zjištění konvergence (divergence) číselných řad s nezápornými členy. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ konverguje?

Písemná zkouška z MB102 – 10. 1. – PŘÍKLADY

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO.

Část III. (Celkem 10 bodů.)

Doplňme, že vyšetřením průběhu funkce f v níže uvedeném příkladu se rozumí „udat definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; určit body nespojitosti a jejich druh včetně příslušných jednostranných limit (pokud existují), nulové body (pokud existují) a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná; stanovit první (a druhou, je-li potřeba) derivaci; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; všechny asymptoty; vypočítat hodnoty ve význačných bodech (tím se rozumí vyčíslit funkci ve stacionárních a v inflexních bodech a nalézt průsečíky s osami, existují-li); načrtnout její graf".

Příklad 16 (10 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{\ln x^2}{x}.$$

Část IV. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 17 (3 body). Napište rovnici tečny ke grafu funkce

$$f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + x^x, \qquad x > 0$$

v bodě $[1, 2]$.

Příklad 18 (4 body). Najděte Taylorův polynom stupně 3 (tedy polynom stupně nejvýše 3) funkce $f(x) = x^2 \cos(x^2)$ se středem v bodě $x_0 = 0$. Poté vypočtěte

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - x^2}{x^3}.$$

Nápověda: Lze např. využít vyjádření funkce f ve tvaru Maclaurinova rozvoje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

Příklad 19 (3 body). Spočítejte

$$\int \left(\frac{e^x}{e^{2x}+3} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx.$$

Příklad 20 (3 body). Vyčíslete

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}.$$

Příklad 21 (3 body). Určete pro jaké hodnoty parametru $\beta \in \mathbb{R}$ absolutně konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{\beta n}}{\sqrt{3n^3+113}+3n^3+111}.$$

Příklad 22 (4 body). Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}\, y = 1.$$

Poté nalezněte řešení splňující podmínku $y(1) = 1$.

Část V. (Celkem 10 bodů.)

Počítáte 2 příklady ze 3 dle vlastní volby!

Příklad 23 (5 bodů). Mezi obdélníky, jejichž dva vrcholy leží na ose x a další dva (s kladnými druhými souřadnicemi, tj. nad osou x) na parabole $y = 8 - 2x^2$, najděte obdélník s maximálním obsahem. Uveďte délky jeho stran.

Příklad 24 (5 bodů). Vypočítejte délku grafu funkce $\ln(1-x^2)$ na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$.

Příklad 25 (5 bodů). Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(-2)^{n-1}}$$

pomocí součtu mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,(2n+1)\,x^{2n}$ pro $|\,x\,| < 1$.