Písemná zkouška z MB102 – 16. 1. 2008

Část I. (Celkem 9 bodů.)

Část I. A. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 1. Pokud pro libovolnou funkci f mající spojitou derivaci třetího řádu v okolí nějakého reálného bodu x platí

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 1, \quad f''(x) = 0, \quad f^{(3)}(x) = -1,$$

potom je bod x inflexním bodem funkce f.

Tvrzení 2. Existuje monotónní funkce f na intervalu $I = [-2, 5]$, která není integrovatelná na I.

Tvrzení 3. Jestliže mocninná řada se středem $x_0 = 0$ konverguje v bodě $x = c \neq 0$, pak konverguje absolutně ve všech bodech intervalu $(-c, c)$.

Část I. B. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 4. Existuje nekonečně mnoho polynomů nejvýše třetího stupně, které prochází body [0,0], [-1,1], [2,4], ale pouze jeden z nich je druhého stupně.

Tvrzení 5. Je-li funkce f primitivní funkcí k nějaké sudé funkci na $\mathbb{R}$, pak je f lichá.

Tvrzení 6. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$$

je absolutně konvergentní.

Část I. C. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 7. Funkce

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

má v bodě $x = 0$ nespojitost 2. druhu.

Tvrzení 8. Nevlastní integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$$

konverguje.

Tvrzení 9. Diferenciální rovnice $y' + 2y - 3x = \operatorname{arctg}(\ln x^2 + 3y)$ má alespoň 1 řešení splňující počáteční podmínku $y(1) = 1$.

Výsledky Tvrzení 1–9. Správné odpovědi jsou

$$1, 3, 4, 6, 9 \text{ platí}; \quad 2, 5, 7, 8 \text{ neplatí}.$$

□

Část II. (Celkem 11 bodů.)

Úloha 10 (2 body). Uveďte tvar rozkladu na parciální zlomky racionální lomené funkce

$$\frac{2x^2 - 114}{(x-2)\, x^2\, (3x^2 + x + 4)^2}.$$

Neurčité koeficienty nepočítejte!

Výsledek. Hledaný tvar rozkladu zadané funkce je

$$\frac{2x^2 - 114}{(x-2)\, x^2\, (3x^2 + x + 4)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx + E}{(3x^2 + x + 4)^2} + \frac{Fx + G}{3x^2 + x + 4}$$

pro nějaké $A, B, C, D, E, F, G \in \mathbb{R}$. □

Úloha 11 (3 body). Napište definici derivace f' funkce f v bodě x_0. Přímo z této definice pro $f(x) = \sqrt{x}$ spočtěte f' v libovolném bodě $x_0 > 0$.

Výsledek. Viz Definici 7 a Příklad 39 v podkapitole 2.7 ve skriptu doc. Hilschera. □

Úloha 12 (1 bod). Zaveďte funkci f na intervalu $I = [-1, 1]$ tak, aby k ní na I neexistovala žádná primitivní funkce.

Výsledek. Nechť např. funkce f nabývá hodnoty 1 v racionálních bodech intervalu I a je nulová v iracionálních. □

Úloha 13 (2 body). Pro libovolná reálná čísla $a < 0$, $b > 0$ vypočtěte

$$\int_a^b \operatorname{sgn} x \; dx.$$

Připomeňme, že $\operatorname{sgn} x = 1$, je-li $x > 0$; $\operatorname{sgn} x = -1$, je-li $x < 0$; a $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

Výsledek. Platí

$$\int_a^b \operatorname{sgn} x \; dx = a + b.$$

□

Úloha 14 (2 body). Formulujte Leibnizovo kritérium konvergence alternující řady. Poté určete, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n^4 - 3n^3 + 9n - 1}{(5n^3 - 2)\, 4^n}$$

konverguje.

Výsledek. Viz podkapitolu 4.3 ve skriptu doc. Hilschera. Uvedená řada konverguje. □

Úloha 15 (1 bod). Udejte příklad divergentních číselných řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy, pro které řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n)$$

absolutně konverguje.

Výsledek. Položme např.

$$a_n := \frac{n}{3} \quad \text{a} \quad b_n := \frac{n}{2} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

□

Část III. (Celkem 10 bodů.)

Doplňme, že vyšetřením průběhu funkce f v níže uvedeném příkladu se rozumí „udat definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; spočítat limity

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

jestliže existují; určit nulové body (pokud existují) a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná; stanovit první (a druhou, je-li potřeba) derivaci; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; všechny asymptoty; vypočítat hodnoty ve význačných bodech (tím se rozumí vyčíslit funkci ve stacionárních bodech a v bodech, ve kterých neexistuje první či druhá derivace, a nalézt průsečíky s osami); načrtnout její graf".

Příklad 16 (10 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}.$$

Výsledek. Funkce je definována i spojitá na celém $\mathbb{R}$. Není lichá, sudá ani periodická. Nabývá kladných hodnot na kladné poloose, záporných na záporné. Jediným průsečíkem Gr f s osami je bod $[0,0]$. Platí

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{3\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x}\, e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f'(0) = +\infty;$$

$$f''(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2e^{-x}}{9\sqrt[3]{x^5}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Jediným nulovým bodem první derivace je $1/3$. Funkce f roste na intervalu $(-\infty, 1/3]$; klesá na intervalu $[1/3, +\infty)$. V bodě $1/3$ má tudíž globální maximum $1/\sqrt[3]{3e}$. Neboť $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, jejím oborem hodnot je interval $(-\infty, 1/\sqrt[3]{3e}]$. Funkce f je konvexní na intervalech $[(1-\sqrt{3})/3, 0]$, $[(1+\sqrt{3})/3, +\infty)$; konkávní na intervalech $(-\infty, (1-\sqrt{3})/3]$, $[0, (1+\sqrt{3})/3]$. Proto inflexní body jsou $(1-\sqrt{3})/3, 0, (1+\sqrt{3})/3$. Jedinou asymptotou je přímka $y = 0$ v $+\infty$, tj. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

Část IV. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 17 (4 body). Stanovte Hermitův interpolační polynom, je-li požadováno:

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \qquad y_0 = -9, \quad y_1 = -1, \quad y_0' = 10, \quad y_1' = 2.$$

Výsledek. Hledaný polynom je $x^3 - 2x^2 + 3x - 3$. $\square$

Příklad 18 (3 body). Určete

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x.$$

Výsledek. Pomocí l'Hospitalova pravidla lze ukázat, že

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x = 1.$$

$\square$

Příklad 19 (3 body). Vypočítejte

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} \, dx.$$

Výsledek. Platí

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Uvažte substituci $t = \cos x$. $\square$

Příklad 20 (4 body). Vyčíslete nevlastní integrál

$$\int_{-1}^{1} \ln|\,x\,|\; dx.$$

Výsledek. Výsledek je -2. $\square$

Příklad 21 (3 body). Sečtěte

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Výsledek. Protože pro všechna $n\in\mathbb{N}$ je

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)},$$

platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

$\square$

Příklad 22 (3 body). Ze znalosti součtu geometrické řady odvoďte Maclaurinovu řadu funkce

$$\frac{1}{5+2x}$$

a určete její poloměr konvergence.

Výsledek. Právě pro $x\in\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ je

$$\frac{1}{5+2x}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n}x^{n}.$$

$\square$

Část V. (Celkem 10 bodů za 2 příklady ze 3.)

Příklad 23 (5 bodů). Rozlehlý vojenský prostor (nadále zkracujme VP) s půdorysem čtverce o rozloze 100 km^2 je kolem dokola ohraničenou úzkou cestou. Z výchozího místa v jednom rohu VP se lze dostat do cílového místa uvnitř VP tak, že půjdeme 5 km po cestě a poté 2 km kolmo k ní. Přitom můžeme jít libovolnou dobu (menší než 2 hod. rovně) po cestě rychlostí 5 km za hodinu a potom šikmo přes VP rychlostí 3 km za hodinu. Kolik (kilo)metrů máme jít po cestě, abychom došli na místo určení co nejdříve?

Výsledek. K tomu, abychom po cestě ušli $x \in [0,5]$ km, potřebujeme $x/5$ hodin. Naše cesta přes VP pak bude měřit $y = \sqrt{2^2 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 29}$ km a ujdeme ji za $y/3$ hodin. Celkem tedy bude naše cesta trvat

$$f(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 10x + 29}$$

hodin (připomeňme, že $x \in [0,5]$). Jediný nulový bod funkce

$$f'(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\,\frac{x-5}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}}$$

je číslo $7/2$. Protože je f' definována (dokonce spojitá) na intervalu $[0,5]$ a protože

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{23}{15} < f(5) = \frac{5}{3} < f(0) = \frac{\sqrt{29}}{3},$$

funkce f nabývá v bodě $7/2$ svého minima. Po cestě bychom tudíž měli jít 3,5 km. □

Příklad 24 (5 bodů). Vypočtěte obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce f a osou x na intervalu $[0,2]$ kolem osy x, je-li

$$f(x) = \frac{x^3}{6}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Výsledek. Výsledek je

$$\frac{2\pi}{9}\left(\sqrt{5^3} - 1\right).$$

□

Příklad 25 (5 bodů). Najděte:

(a) rovnice křivek s konstantní subnormálou (rovnou hodnotě $a \in \mathbb{R}$) ve všech jejich bodech, tj. obecné řešení rovnice $y\,y' = a$;

(b) všechny (implicitně zadané) funkce $y = f(x)$, pro které v libovolném jejich bodě $[x_0, y_0]$ platí, že podíl $y_0/f'(x_0)$ je čtyřikrát větší než x_0.

Výsledek. Ve druhém případě řešíme diferenciální rovnici

$$\frac{y}{y'} = 4x.$$

Snadno se ukáže, že řešeními jsou:

(a) Křivky $y^2 = 2ax + C$ pro $C \in \mathbb{R}$.

(b) Křivky $y^4 = Dx$, kde $D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\square$