# Písemná zkouška z MB102 – 16. 1. 2008

Zadání si ponecháváte. Odevzdáváte pouze (řádně vyplněný) přiložený list.

## Část I. (Celkem 9 bodů.)

Ohledně instrukcí viz(te) přiložený list!

### Část I. A. (Celkem 3 body.)

**Tvrzení 1.** Pokud pro libovolnou funkci $f$ mající spojitou derivaci třetího řádu v okolí nějakého reálného bodu $x$ platí

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 1, \quad f''(x) = 0, \quad f^{(3)}(x) = -1,$$

potom je bod $x$ inflexním bodem funkce $f$.

**Tvrzení 2.** Existuje monotónní funkce $f$ na intervalu $I = [-2, 5]$, která není integrovatelná na $I$.

**Tvrzení 3.** Jestliže mocninná řada se středem $x_0 = 0$ konverguje v bodě $x = c \neq 0$, pak konverguje absolutně ve všech bodech intervalu $(-c, c)$.

### Část I. B. (Celkem 3 body.)

**Tvrzení 4.** Existuje nekonečně mnoho polynomů nejvýše třetího stupně, které prochází body [0,0], [-1,1], [2,4], ale pouze jeden z nich je druhého stupně.

**Tvrzení 5.** Je-li funkce $f$ primitivní funkcí k nějaké sudé funkci na $\mathbb{R}$, pak je $f$ lichá.

**Tvrzení 6.** Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$$

je absolutně konvergentní.

### Část I. C. (Celkem 3 body.)

**Tvrzení 7.** Funkce

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

má v bodě $x = 0$ nespojitost 2. druhu.

**Tvrzení 8.** Nevlastní integrál $\int_0^1 x^{-1}\, dx$ konverguje.

**Tvrzení 9.** Diferenciální rovnice $y' + 2y - 3x = \operatorname{arctg}(\ln x^2 + 3y)$ má alespoň 1 řešení splňující počáteční podmínku $y(1) = 1$.

## Část II. (Celkem 11 bodů.)

**Úloha 10 (2 body).** Uveďte tvar rozkladu na parciální zlomky racionální lomené funkce

$$\frac{2x^2 - 114}{(x-2)\,x^2\,(3x^2+x+4)^2}.$$

Neurčité koeficienty nepočítejte!

**Úloha 11 (3 body).** Napište definici derivace $f'$ funkce $f$ v bodě $x_0$. Přímo z této definice pro $f(x) = \sqrt{x}$ spočtěte $f'$ v libovolném bodě $x_0 > 0$.

**Úloha 12 (1 bod).** Zaveďte funkci $f$ na intervalu $I = [-1, 1]$ tak, aby k ní na $I$ neexistovala žádná primitivní funkce.

**Úloha 13 (2 body).** Pro libovolná reálná čísla $a < 0$, $b > 0$ vypočtěte

$$\int_a^b \operatorname{sgn} x \; dx.$$

Připomeňme, že $\operatorname{sgn} x = 1$, je-li $x > 0$; $\operatorname{sgn} x = -1$, je-li $x < 0$; a $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

**Úloha 14 (2 body).** Formulujte Leibnizovo kritérium konvergence alternující řady. Poté určete, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n^4 - 3n^3 + 9n - 1}{(5n^3 - 2)\,4^n}$$

konverguje.

**Úloha 15 (1 bod).** Udejte příklad divergentních číselných řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy, pro které řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n)$$

absolutně konverguje.

# Písemná zkouška z MB102 – 16. 1. 2008

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO.

## Část III. (Celkem 10 bodů.)

Doplňme, že vyšetřením průběhu funkce $f$ v níže uvedeném příkladu se rozumí „udat definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; spočítat limity $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, jestliže existují; určit nulové body (pokud existují) a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná; stanovit první (a druhou, je-li potřeba) derivaci; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; všechny asymptoty; vypočítat hodnoty ve význačných bodech (tím se rozumí vyčíslit funkci ve stacionárních bodech a v bodech, ve kterých neexistuje první či druhá derivace, a nalézt průsečíky s osami); načrtnout její graf".

**Příklad 16 (10 bodů).** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}.$$

## Část IV. (Celkem 20 bodů.)

**Příklad 17 (4 body).** Stanovte Hermitův interpolační polynom, je-li požadováno:

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \qquad y_0 = -9, \quad y_1 = -1, \quad y_0' = 10, \quad y_1' = 2.$$

**Příklad 18 (3 body).** Určete

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x.$$

**Příklad 19 (3 body).** Vypočítejte

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1}\, dx.$$

**Příklad 20 (4 body).** Vyčíslete nevlastní integrál

$$\int_{-1}^{1} \ln|\,x\,|\ dx.$$

**Příklad 21 (3 body).** Sečtěte

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

**Příklad 22 (3 body).** Ze znalosti součtu geometrické řady odvoďte Maclaurinovu řadu funkce

$$\frac{1}{5+2x}$$

a určete její poloměr konvergence.

## Část V. (Celkem 10 bodů.)

Počítáte 2 příklady ze 3 dle vlastní volby!

**Příklad 23 (5 bodů).** Rozlehlý vojenský prostor (nadále zkracujme VP) s půdorysem čtverce o rozloze 100 km$^2$ je kolem dokola ohraničenou úzkou cestou. Z výchozího místa v jednom rohu VP se lze dostat do cílového místa uvnitř VP tak, že půjdeme 5 km po cestě a poté 2 km kolmo k ní. Přitom můžeme jít libovolnou dobu (menší než 2 hod. rovně) po cestě rychlostí 5 km za hodinu a potom šikmo přes VP rychlostí 3 km za hodinu. Kolik (kilo)metrů máme jít po cestě, abychom došli na místo určení co nejdříve?

**Příklad 24 (5 bodů).** Vypočtěte obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $f$ a osou $x$ na intervalu $[0,2]$ kolem osy $x$, je-li

$$f(x)=\frac{x^3}{6}, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

**Příklad 25 (5 bodů).** Najděte:

(a) rovnice křivek s konstantní subnormálou (rovnou hodnotě $a\in\mathbb{R}$) ve všech jejich bodech, tj. obecné řešení rovnice $y\,y'=a$;

(b) všechny (implicitně zadané) funkce $y=f(x)$, pro které v libovolném jejich bodě $[x_0,y_0]$ platí, že podíl $y_0/f'(x_0)$ je čtyřikrát větší než $x_0$.