Písemná zkouška z MB102 – 24. 1. 2008

Část I. (Celkem 9 bodů.)

Část I. A. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 1. Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní obě jednostranné limity, pak je f na nějakém ryzím okolí bodu x_0 ohraničená.

Tvrzení 2. Pro libovolnou funkci f spojitou a ohraničenou na intervalu $(0, 10)$ je

$$\left| \int_0^{10} f(x)\, dx \right| \leq \int_0^{10} |\, f(x) \,|\, dx.$$

Tvrzení 3. Maclaurinova řada libovolného polynomu má konečný počet nenulových členů.

Část I. B. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 4. Funkce

$$f(x) = \cos(\cos(\sin(-3x+2))) + \operatorname{arctg}\left(2x^2+3\right) \cdot e^{-3x+2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

je diferencovatelná na celém $\mathbb{R}$.

Tvrzení 5. K funkci

$$\frac{\ln x}{x}$$

existuje na intervalu $(0, 1)$ primitivní funkce, která je vyšší funkcí, tj. není vyjádřitelná pomocí elementárních funkcí.

Tvrzení 6. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ diverguje k $+\infty$.

Část I. C. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 7. Libovolný polynom p je rostoucí v bodě $x = 2$, právě když je $p'(2) > 0$.

Tvrzení 8. Existuje funkce f, která má derivaci na intervalu $I = [-2, 2]$ a pro kterou je dolní integrál z f na I ostře menší než horní integrál z f na I.

Tvrzení 9. Rovnice

$$y'' = 2x + 7y' - 6y$$

je lineární diferenciální rovnicí 2. řádu.

Výsledky Tvrzení 1–9. Správné odpovědi jsou

$$1, 2, 3, 4, 6, 9 \text{ platí}; \quad 5, 7, 8 \text{ neplatí}.$$

$\square$

Část II. (Celkem 11 bodů.)

Úloha 10 (2 body). Udejte příklad množin $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ takových, aby platilo

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset \quad \text{a} \quad \sup A = \inf B = \inf C = \sup C.$$

Výsledek. Množina C musí být jednoprvková. Nechť tedy např. $C := \{0\}$. Nyní můžeme zřejmě zvolit $A := (-1, 0)$, $B := (0, 1)$. $\square$

Úloha 11 (1 bod). Napište Weierstrassovu větu pro funkci f, která je spojitá na intervalu $[a, b]$, přičemž $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Výsledek. Viz takto nazvanou větu v podkapitole 2.5 ve skriptu doc. Hilschera. $\square$

Úloha 12 (3 body). Nakreslete grafy funkcí

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad g(x) = \ln|x|, \quad x \neq 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Výsledek. Uvědomíte-li si, že obě zadané funkce jsou sudé, k vykreslení grafů f a g postačuje znát grafy funkcí e^x, $x \in (-\infty, 0]$ a $\ln x$, $x \in (0, +\infty)$. Viz Obrázek 11 na str. 6 ve skriptu Mgr. Hasila. $\square$

Úloha 13 (1 bod). Kolik existuje různých primitivních funkcí k $f(x) = \cos(\ln x)$ na $(0, 10)$?

Výsledek. Nekonečně mnoho. Přesněji řečeno, právě tolik, kolik je reálných čísel. □

Úloha 14 (2 body). Vyjádřete bez symbolů derivace a integrace výraz

$$\left(\int_x^0 t^5 \ln (t+1)\, dt\right)'$$

pro $x \in (-1, 1)$, je-li derivováno podle x.

Výsledek. Platí

$$\left(\int_x^0 t^5 \ln (t+1)\, dt\right)' = -x^5 \ln (x+1), \qquad |\, x \,| < 1.$$

Viz podkapitolu 3.7 ve skriptu doc. Hilschera. □

Úloha 15 (2 body). Definujte geometrickou řadu. Poté uveďte, za jakých podmínek konverguje a jaký je v tomto případě její součet.

Výsledek. Viz začátek podkapitoly 4.1 ve skriptu doc. Hilschera a tvrzení nazvané „Konvergence a součet geometrické řady“ tamtéž. □

Část III. (Celkem 10 bodů.)

Doplňme, že vyšetřením průběhu funkce f v níže uvedeném příkladu se rozumí „udat definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; spočítat limity

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

jestliže existují; určit body nespojitosti a jejich druh včetně příslušných jednostranných limit (pokud existují), nulové body (pokud existují) a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná; stanovit první (a druhou, je-li potřeba) derivaci; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; všechny asymptoty; vypočítat hodnoty ve význačných bodech (tím se rozumí vyčíslit funkci ve stacionárních a v inflexních bodech a nalézt průsečíky s osami, existují-li); načrtnout její graf".

Příklad 16 (10 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2-x}.$$

Výsledek. Funkce je definována i spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Není lichá, sudá ani periodická. Je kladná právě na intervalu $(0,2)$. Jediným průsečíkem $\operatorname{Gr} f$ s osami je bod $[0,0]$. V bodě $x=2$ nastává skok, protože

$$\lim_{x\to2-} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to2+} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Platí

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\};$$

$$f''(x) = \frac{2\,(1-x)}{(x^2-2x+2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

První derivace nemá nulový bod. Funkce f proto roste v každém bodě svého definičního oboru. Neboť

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4},$$

je oborem hodnot množina $(-\pi/2, \pi/2) \setminus \{-\pi/4\}$. Funkce f je konvexní na intervalu $(-\infty, 1]$; konkávní na intervalech $[1,2)$, $(2,+\infty)$. Bod $x=1$ je tedy jediným inflexním bodem, přičemž $f(1) = \pi/4$. Jedinou asymptotou je přímka $y = -\pi/4$ v $\pm\infty$. $\square$

Část IV. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 17 (3 body). Nalezněte polynom p nejvýše třetího stupně, pro který platí

$$p(0) = 1, \quad p(1) = 0, \quad p(2) = 1, \quad p(3) = 10.$$

Výsledný polynom uveďte ve tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Výsledek. Hodnoty koeficientů jsou

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 0, \quad d = 1.$$

□

Příklad 18 (3 body). Určete derivaci funkce $y = f(x)$ zadané rovnicí

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Výsledek. Platí

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

□

Příklad 19 (5 bodů). Pro $x \in (0, 1)$ vypočtěte

$$\int \left(\frac{x^2+1}{x\,(x^2-1)} + 2^x + \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} + 4\sin x - 5\cos x \right) dx.$$

Výsledek. Lehce lze obdržet výsledek

$$\ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right| + \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3}{2}\arcsin x - 4\cos x - 5\sin x + C, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

□

Příklad 20 (3 body). Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Výsledek. Součet dané řady je 3/4. $\square$

Příklad 21 (3 body). Určete poloměr a obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\sqrt{n^4 + 2n^3 + 111}} (x-2)^n.$$

Výsledek. Uvedená řada konverguje právě pro

$$x \in \left[2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right].$$

$\square$

Příklad 22 (3 body). Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' - \frac{y}{x} = 3xy^2.$$

Výsledek. Obecné řešení zadané Bernoulliovy diferenciální rovnice je

$$y = \frac{x}{C - x^3}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dodejme, že $y \equiv 0$ je singulárním řešením. $\square$

Část V. (Celkem 10 bodů za 2 příklady ze 3.)

Příklad 23 (5 bodů). Uveďte x-ovou souřadnici x_A bodu paraboly $y = x^2$, který je nejblíže bodu $A = [1, 2]$.

Výsledek. Není obtížné uvědomit si, že příklad má právě jedno řešení a že úkolem je vlastně najít absolutní minimum funkce

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Funkce f zjevně nabývá nejmenší hodnoty ve stejném bodě jako funkce

$$g(x) = (x-1)^2 + (x^2-2)^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Neboť

$$g\prime(x) = 4x^3 - 6x - 2, \qquad x \in \mathbb{R},$$

řešením rovnice $0 = 2x^3 - 3x - 1$ dostáváme nejprve stacionární bod $x = -1$ a po vydělení polynomu $2x^3 - 3x - 1$ polynomem $x + 1$ také zbylé dva stacionární body

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{a} \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Protože funkce g je polynomem (má derivaci na celé reálné ose), z geometrického významu úlohy lze již obdržet výsledek

$$x_A = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

□

Příklad 24 (5 bodů). Vypočtěte obsah S obrazce složeného ze dvou částí roviny vymezených přímkami $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$, osou x a grafem funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Výsledek. Je

$$S = -\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \frac{3}{2}\left(1 + \sqrt[3]{9}\right).$$

□

Příklad 25 (5 bodů). Vyjádřete přibližnou hodnotu čísla $\sin\left(\frac{\pi}{180}\right)$ s chybou ostře menší než 10^{-8}.

Výsledek. S uvedenou chybou platí

$$\sin\left(\frac{\pi}{180}\right) \approx \frac{\pi}{180} - \frac{\pi^3}{180^3\,3!}.$$

Další člen Maclaurinova rozvoje

$$\frac{\pi^5}{180^5\,5!}$$

již není potřeba přičítat. $\square$