Písemná zkouška z MB102 – 24. 1. 2008

Zadání si ponecháváte. Odevzdáváte pouze (řádně vyplněný) přiložený list.

Část I. (Celkem 9 bodů.)

Ohledně instrukcí viz(te) přiložený list!

Část I. A. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 1. Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní obě jednostranné limity, pak je f na nějakém ryzím okolí bodu x_0 ohraničená.

Tvrzení 2. Pro libovolnou funkci f spojitou a ohraničenou na intervalu $(0, 10)$ je

$$\left| \int_0^{10} f(x)\, dx \right| \leq \int_0^{10} |\, f(x)\, |\; dx.$$

Tvrzení 3. Maclaurinova řada libovolného polynomu má konečný počet nenulových členů.

Část I. B. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 4. Funkce

$$f(x) = \cos(\cos(\sin(-3x + 2))) + \operatorname{arctg}\left(2x^2 + 3\right) \cdot e^{-3x+2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

je diferencovatelná na celém $\mathbb{R}$.

Tvrzení 5. K funkci

$$\frac{\ln x}{x}$$

existuje na intervalu $(0, 1)$ primitivní funkce, která je vyšší funkcí, tj. není vyjádřitelná pomocí elementárních funkcí.

Tvrzení 6. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ diverguje k $+\infty$.

Část I. C. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 7. Libovolný polynom p je rostoucí v bodě $x = 2$, právě když je $p'(2) > 0$.

Tvrzení 8. Existuje funkce f, která má derivaci na intervalu $I = [-2, 2]$ a pro kterou je dolní integrál z f na I ostře menší než horní integrál z f na I.

Tvrzení 9. Rovnice

$$y'' = 2x + 7y' - 6y$$

je lineární diferenciální rovnicí 2. řádu.

Část II. (Celkem 11 bodů.)

Úloha 10 (2 body). Udejte příklad množin $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ takových, aby platilo

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset \quad \text{a} \quad \sup A = \inf B = \inf C = \sup C.$$

Úloha 11 (1 bod). Napište Weierstrassovu větu pro funkci f, která je spojitá na intervalu $[a, b]$, přičemž $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Úloha 12 (3 body). Nakreslete grafy funkcí

$$f(x) = e^{-|\,x\,|}, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad g(x) = \ln|\,x\,|, \quad x \neq 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Úloha 13 (1 bod). Kolik existuje různých primitivních funkcí k $f(x) = \cos(\ln x)$ na $(0, 10)$?

Úloha 14 (2 body). Vyjádřete bez symbolů derivace a integrace výraz

$$\left(\int_x^0 t^5 \ln(t+1)\, dt \right)'$$

pro $x \in (-1, 1)$, je-li derivováno podle x.

Úloha 15 (2 body). Definujte geometrickou řadu. Poté uveďte, za jakých podmínek konverguje a jaký je v tomto případě její součet.

Písemná zkouška z MB102 – 24. 1. 2008

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO.

Část III. (Celkem 10 bodů.)

Doplňme, že vyšetřením průběhu funkce f v níže uvedeném příkladu se rozumí „udat definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; spočítat limity

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

jestliže existují; určit body nespojitosti a jejich druh včetně příslušných jednostranných limit (pokud existují), nulové body (pokud existují) a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná; stanovit první (a druhou, je-li potřeba) derivaci; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; všechny asymptoty; vypočítat hodnoty ve význačných bodech (tím se rozumí vyčíslit funkci ve stacionárních a v inflexních bodech a nalézt průsečíky s osami, existují-li); načrtnout její graf".

Příklad 16 (10 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2-x}.$$

Část IV. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 17 (3 body). Nalezněte polynom p nejvýše třetího stupně, pro který platí

$$p(0) = 1, \quad p(1) = 0, \quad p(2) = 1, \quad p(3) = 10.$$

Výsledný polynom uveďte ve tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Příklad 18 (3 body). Určete derivaci funkce $y = f(x)$ zadané rovnicí

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Příklad 19 (5 bodů). Pro $x \in (0,1)$ vypočtěte

$$\int \left(\frac{x^2+1}{x\,(x^2-1)} + 2^x + \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} + 4\sin x - 5\cos x \right) dx.$$

Příklad 20 (3 body). Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Příklad 21 (3 body). Určete poloměr a obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\sqrt{n^4+2n^3+111}} (x-2)^n.$$

Příklad 22 (3 body). Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' - \frac{y}{x} = 3xy^2.$$

Část V. (Celkem 10 bodů.)

Počítáte 2 příklady ze 3 dle vlastní volby!

Příklad 23 (5 bodů). Uveďte x-ovou souřadnici x_A bodu paraboly $y = x^2$, který je nejblíže bodu $A = [1,2]$.

Příklad 24 (5 bodů). Vypočtěte obsah S obrazce složeného ze dvou částí roviny vymezených přímkami $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$, osou x a grafem funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Příklad 25 (5 bodů). Vyjádřete přibližnou hodnotu čísla $\sin\left(\frac{\pi}{180}\right)$ s chybou ostře menší než 10^{-8}.