Písemná zkouška z MB102 – 31. 1. 2008

Část I. (Celkem 9 bodů.)

Část I. A. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 1. Pro každou (shora i zdola) ohraničenou množinu $M \subseteq \mathbb{R}$, která má alespoň dva různé prvky, je $\sup M > \inf M$.

Tvrzení 2. Součinem i podílem libovolných dvou funkcí integrovatelných na intervalu $I = (0, \infty)$ je funkce integrovatelná na I.

Tvrzení 3. Pokud pro libovolnou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, a_n \,|}$, pak mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konverguje absolutně alespoň ve dvou různých bodech x.

Část I. B. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 4. Je-li funkce f spojitá a klesající na intervalu $I = (0, \infty)$, potom je inverzní funkce f^{-1} spojitá a rostoucí na intervalu $J = f(I)$.

Tvrzení 5. Funkce $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou primitivními funkcemi k téže funkci na $\mathbb{R}$.

Tvrzení 6. Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{5^n}$$

konverguje.

Část I. C. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 7. Zobrazení definované na množině všech polynomů tak, že každému polynomu přiřadí jeho derivaci, není surjektivní (tj. není na) ani injektivní (prosté).

Tvrzení 8. Nechť C je křivka v rovině a $[x(t), y(t)]$ její parametrizace, přičemž funkce $x(t)$ a $y(t)$ mají spojitou derivaci na intervalu $[0, 1]$. Potom pro délku d křivky C na intervalu $[0, 1]$ platí

$$d = \int_0^1 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Tvrzení 9. Z relativní konvergence řad $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ plyne, že rovněž řada $\sum_{n=0}^{\infty} (6a_n - 5b_n)$ relativně konverguje.

Výsledky Tvrzení 1–9. Správné odpovědi jsou

$$1, 3, 6, 8 \text{ platí}; \quad 2, 4, 5, 7, 9 \text{ neplatí}.$$

$\square$

Část II. (Celkem 11 bodů.)

Úloha 10 (1 bod). Definujte

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2,$$

jestliže je f definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Výsledek. Viz definici nazvanou „Vlastní limita v nevlastním bodě“ v podkapitole 2.4 ve skriptu doc. Hilschera. $\square$

Úloha 11 (2 body). Uveďte

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Poté (bez použití l'Hospitalova pravidla) stanovte

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 5x}.$$

Výsledek. Je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 5x} = \frac{6}{5}.$$

$\square$

Úloha 12 (1 bod). Udejte příklad funkce, která je v bodě $x_0 = 8$ spojitá, přestože nemá v tomto bodě derivaci.

Výsledek. Uvažte např. funkci $f(x) = |\, x - 8 \,|$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Úloha 13 (1 bod). Nechť je dána funkce f mající derivace všech řádů na celé reálné ose. Definujte pro tuto funkci pojem „inflexní bod“.

Výsledek. Viz definici nazvanou „Inflexní bod“ v podkapitole 2.14 ve skriptu doc. Hilschera. $\square$

Úloha 14 (3 body). Vypočtěte

$$\int_{-2}^{2} |\, x-1 \,|\; dx, \qquad \int_{-2}^{2} \operatorname{arctg} x \; dx.$$

Nápověda: Uvažte geometrický význam určitého integrálu.

Výsledek. Zjevně je

$$\int_{-2}^{2} |\, x-1 \,|\; dx = 5, \qquad \int_{-2}^{2} \operatorname{arctg} x \; dx = 0.$$

$\square$

Úloha 15 (3 body). Najděte Maclaurinův rozvoj funkce

$$f(x) = \int_0^x e^{\left(t^2\right)}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Výsledek. Lze dokázat, že

$$\int_0^x e^{\left(t^2\right)}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Část III. (Celkem 10 bodů.)

Doplňme, že vyšetřením průběhu funkce f v níže uvedeném příkladu se rozumí „udat definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; spočítat limity $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, jestliže existují; určit body nespojitosti a jejich druh včetně příslušných jednostranných limit (pokud existují); stanovit první (a druhou, je-li potřeba) derivaci; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; všechny asymptoty; vypočítat hodnoty ve význačných bodech (tím se rozumí vyčíslit funkci ve stacionárních a v inflexních bodech a nalézt průsečíky s osami); načrtnout její graf“.

Příklad 16 (10 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x - 1}.$$

Výsledek. Funkce je definována i spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Není lichá, sudá ani periodická. Průsečíky Gr f s osami jsou body $[1-\sqrt[3]{2}, 0]$ a $[0, -1]$. V bodě $x = 1$ má funkce f nespojitost druhého druhu a jejím oborem hodnot je celé $\mathbb{R}$, neboť

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Po úpravě

$$f(x) = (x-1)^2 + \frac{2}{x-1} \quad \text{pro } x \neq 1$$

není obtížné spočítat

$$f'(x) = 2\,\frac{(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1;$$

$$f''(x) = 2\,\frac{(x-1)^3 + 2}{(x-1)^3}, \quad x \neq 1.$$

Jediným stacionárním bodem je $x = 2$. Funkce f roste na intervalu $[2, +\infty)$; klesá na intervalech $(-\infty, 1)$, $(1, 2]$. V bodě $x = 2$ tudíž nabývá hodnoty lokálního minima $y = 3$. Je konvexní na intervalech $(-\infty, 1-\sqrt[3]{2}]$, $(1, +\infty)$; konkávní na intervalu $[1-\sqrt[3]{2}, 1)$. Bod $x = 1 - \sqrt[3]{2}$ je tedy jediným inflexním bodem. Přímka $x = 1$ je asymptotou bez směrnice. Asymptoty se směrnicí daná funkce nemá. $\square$

Část IV. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 17 (3 body). Sestrojte přirozený kubický interpolační splajn pro body $x_0 = -3$, $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$ a hodnoty $y_0 = -3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$.

Výsledek. Výsledkem jsou očividně polynomy

$$S_1(x) \equiv x, \quad S_2(x) \equiv x.$$

□

Příklad 18 (3 body). Za pomoci diferenciálu přibližně určete $\arcsin 0{,}497$.

Výsledek. Platí

$$\arcsin 0{,}497 \approx \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}\, 0{,}003.$$

□

Příklad 19 (3 body). Pomocí metody per partes spočtěte

$$\int \left(2 - x^2\right) e^x \, dx.$$

Výsledek. Je

$$\int \left(2 - x^2\right) e^x \, dx = \left(2x - x^2\right) e^x + C, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

□

Příklad 20 (3 body). Vyčíslete

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^4} \, dx.$$

Výsledek. Substitucí $t = 1 + x^4$ ($x^3\,dx = 1/4\,dt$ a transformací mezí 0, 1 na 1, 2) lze získat

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\,\ln 2.$$

□

Příklad 21 (5 bodů). Zjistěte, pro jaké $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ a $\beta \in \mathbb{R}$ řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n\, n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} \right)$$

konvergují.

Výsledek. První z uvedených řad konverguje právě pro $\alpha \in (-e, e)$, zatímco druhá pro libovolné $\beta \in \mathbb{R}$, neboť

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} \right) = \lim_{n\to+\infty} \beta - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} = \beta.$$

□

Příklad 22 (3 body). Určete všechna nekonstantní řešení homogenní diferenciální rovnice

$$y' = \frac{(x+y)\,y}{x^2}.$$

Výsledek. Řešeními zadané diferenciální rovnice jsou křivky

$$x\, e^{\frac{x}{y}} = C, \qquad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Doplňme, že řešením je také funkce $y \equiv 0$. □

Část V. (Celkem 10 bodů za 2 příklady ze 3.)

Příklad 23 (5 bodů). Je hledána obdélníková parcela o rozměrech $5a \times b$ se záměrem ji po obvodu celou oplotit a pak ještě ploty kolmými na první stranu rozdělit na 5 (stejně velkých) parcel o rozměrech $a \times b$. Pro jaké hodnoty a, b je rozloha parcely $S = 5ab$ maximální, má-li být celková délka plotů 2 400 m?

Výsledek. Přeformulujme zadání: Chceme maximalizovat součin čísel $5ab$, přičemž je požadováno, aby $6b + 10a = 2400$. Lehce lze dokázat, že funkce

$$5a\,\frac{2\,400 - 10a}{6}$$

definovaná pro $a \in [0, 240]$ nabývá maximální hodnoty právě pro $a = 2400/20$. Tedy výsledek je

$$a = 120 \text{ m}, \qquad b = 200 \text{ m},$$

což již plyne z rovností $2400/2 = 10a$, $2400 = 6b + 10a$. □

Příklad 24 (5 bodů). Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro objem V_K rotačního komolého kužele s podstavami o poloměrech r_1 a r_2 a výškou v.

Výsledek. Platí

$$V_K = \pi \int_0^v \left(r_1 - \frac{r_1 - r_2}{v}\, x \right)^2 dx = \frac{\pi v}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 \right).$$

□

Příklad 25 (5 bodů). Pro libovolné $x \in (-1, 1)$ určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, x^{n-1}.$$

Výsledek. Pomocí dvojího derivování součtu geometrické řady (před druhou derivací vynásobeného x) lze vypočíst

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, x^{n-1} = \frac{1 + x}{(1 - x)^3}, \qquad |\, x \,| < 1.$$

□