Písemná zkouška z MB102 – 31. 1. 2008

Zadání si ponecháváte. Odevzdáváte pouze (řádně vyplněný) přiložený list.

Část I. (Celkem 9 bodů.)

Ohledně instrukcí viz(te) přiložený list!

Část I. A. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 1. Pro každou (shora i zdola) ohraničenou množinu $M \subseteq \mathbb{R}$, která má alespoň dva různé prvky, je $\sup M > \inf M$.

Tvrzení 2. Součinem i podílem libovolných dvou funkcí integrovatelných na intervalu $I = (0, \infty)$ je funkce integrovatelná na I.

Tvrzení 3. Pokud pro libovolnou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, a_n \,|}$, pak mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konverguje absolutně alespoň ve dvou různých bodech x.

Část I. B. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 4. Je-li funkce f spojitá a klesající na intervalu $I = (0, \infty)$, potom je inverzní funkce f^{-1} spojitá a rostoucí na intervalu $J = f(I)$.

Tvrzení 5. Funkce $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou primitivními funkcemi k téže funkci na $\mathbb{R}$.

Tvrzení 6. Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{5^n}$$

konverguje.

Část I. C. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 7. Zobrazení definované na množině všech polynomů tak, že každému polynomu přiřadí jeho derivaci, není surjektivní (tj. není na) ani injektivní (prosté).

Tvrzení 8. Nechť C je křivka v rovině a $[x(t), y(t)]$ její parametrizace, přičemž funkce $x(t)$ a $y(t)$ mají spojitou derivaci na intervalu $[0, 1]$. Potom pro délku d křivky C na intervalu $[0, 1]$ platí

$$d = \int_0^1 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Tvrzení 9. Z relativní konvergence řad $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ plyne, že rovněž řada $\sum_{n=0}^{\infty}(6a_n - 5b_n)$ relativně konverguje.

Část II. (Celkem 11 bodů.)

Úloha 10 (1 bod). Definujte

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2,$$

jestliže je f definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Úloha 11 (2 body). Uveďte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Poté (bez použití l'Hospitalova pravidla) stanovte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 5x}.$$

Úloha 12 (1 bod). Udejte příklad funkce, která je v bodě $x_0 = 8$ spojitá, přestože nemá v tomto bodě derivaci.

Úloha 13 (1 bod). Nechť je dána funkce f mající derivace všech řádů na celé reálné ose. Definujte pro tuto funkci pojem „inflexní bod".

Úloha 14 (3 body). Vypočtěte

$$\int_{-2}^{2} |\, x - 1 \,| \; dx, \qquad \int_{-2}^{2} \operatorname{arctg} x \; dx.$$

Nápověda: Uvažte geometrický význam určitého integrálu.

Úloha 15 (3 body). Najděte Maclaurinův rozvoj funkce

$$f(x) = \int_0^x e^{\left(t^2\right)}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Písemná zkouška z MB102 – 31. 1. 2008

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO.

Část III. (Celkem 10 bodů.)

Doplňme, že vyšetřením průběhu funkce f v níže uvedeném příkladu se rozumí „udat definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; spočítat limity

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

jestliže existují; určit body nespojitosti a jejich druh včetně příslušných jednostranných limit (pokud existují); stanovit první (a druhou, je-li potřeba) derivaci; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; všechny asymptoty; vypočítat hodnoty ve význačných bodech (tím se rozumí vyčíslit funkci ve stacionárních a v inflexních bodech a nalézt průsečíky s osami); načrtnout její graf“.

Příklad 16 (10 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x - 1}.$$

Část IV. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 17 (3 body). Sestrojte přirozený kubický interpolační splajn pro body

$$x_0 = -3, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

a po řadě hodnoty v těchto bodech

$$y_0 = -3, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 3.$$

Příklad 18 (3 body). Za pomoci diferenciálu přibližně určete

$$\arcsin 0,497.$$

Příklad 19 (3 body). Pomocí metody per partes spočtěte

$$\int \left(2 - x^2\right) e^x \, dx.$$

Příklad 20 (3 body). Vyčíslete

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3}{1 + x^4} \, dx.$$

Příklad 21 (5 bodů). Zjistěte, pro jaké $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ a $\beta \in \mathbb{R}$ řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \, n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} \right)$$

konvergují.

Příklad 22 (3 body). Určete všechna nekonstantní řešení homogenní diferenciální rovnice

$$y' = \frac{(x + y) \, y}{x^2}.$$

Část V. (Celkem 10 bodů.)

Počítáte 2 příklady ze 3 dle vlastní volby!

Příklad 23 (5 bodů). Je hledána obdélníková parcela o rozměrech $5a \times b$ se záměrem ji po obvodu celou oplotit a pak ještě ploty kolmými na první stranu rozdělit na 5 (stejně velkých) parcel o rozměrech $a \times b$. Pro jaké hodnoty a, b je rozloha parcely $S = 5ab$ maximální, má-li být celková délka plotů 2 400 m?

Příklad 24 (5 bodů). Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro objem V_K rotačního komolého kužele s podstavami o poloměrech r_1 a r_2 a výškou v.

Příklad 25 (5 bodů). Pro libovolné $x \in (-1, 1)$ určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \, x^{n-1}.$$