Písemná zkouška z MB102 – 7. 2. 2008

Část I. (Celkem 9 bodů.)

Část I. A. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 1. Pro každou dvojici čísel $a, b \in \mathbb{R}$ existuje sudá funkce $f^{a,b}$, která má v $+\infty$ a v $-\infty$ asymptotu $y = ax + b$.

Tvrzení 2. Existuje funkce f, která není integrovatelná na intervalu $[0, 1]$, ale $|\, f\,|$ je na tomto intervalu integrovatelná.

Tvrzení 3. Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(3a_n + \pi) = 0$.

Část I. B. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 4. V alespoň jednom bodě intervalu $(0, 4)$ má polynom $x\,(x-4)^5$ tečnu rovnoběžnou s osou x.

Tvrzení 5. Funkce

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sgn}(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

Tvrzení 6. Jsou-li funkce $a(x)$, $b(x)$ spojité na intervalu $I = (-1, 1)$, má počáteční úloha $y' = a(x)\, y + b(x)$, $y(0) = 0$ právě jedno řešení na celém I.

Část I. C. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 7. Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu, právě když má v tomto bodě obě jednostranné limity.

Tvrzení 8. Pokud je funkce f monotónní na $[-5, 5]$, potom rovnost

$$\int_{-5}^{5} f(x)\, dx + \int_{5}^{-5} f(x)\, dx = 0$$

má smysl a platí.

Tvrzení 9. Pro libovolnou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je poloměr konvergence mocninných řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}\, x^n$$

stejný.

Výsledky Tvrzení 1–9. Správné odpovědi jsou

$$2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 \text{ platí;} \qquad 1, 7 \text{ neplatí.}$$

□

Část II. (Celkem 11 bodů.)

Úloha 10 (1 bod). Kolik existuje navzájem různých polynomů stupně nejvýše 4, které v bodech $x_0 = 5, x_1 = 55$ nabývají po řadě hodnot $y_0 = 55, y_1 = 5$ a jejichž první a druhá derivace v bodě x_0 je nulová?

Výsledek. Existuje jich pravě tolik, kolik je možných voleb $y_2 \in \mathbb{R}$ při pevně (ale libovolně) daném x_2, tj. existuje bijekce mezi množinou těchto polynomů a $\mathbb{R}$. Stačilo tedy odpovědět, že „je jich nekonečně mnoho“ či „množina takových polynomů je jednoparametrická“. □

Úloha 11 (3 body). Určete 12. derivaci funkce

$$f(x) = e^{2x} + \cos x + x^{10} - 5x^7 + 6x^3 - 11x + 3, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Výsledek. Zjevně platí

$$f^{(12)}(x) = 2^{12}\, e^{2x} + \cos x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

□

Úloha 12 (1 bod). Nechť je funkce $x = f(y)$ spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$ a má v bodě y_0 derivaci $f'(y_0) > 0$. Napište vzorec pro výpočet derivace inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ v bodě $x_0 = f(y_0)$.

Výsledek. Viz větu nazvanou „Derivace inverzní funkce“ v podkapitole 2.8 ve skriptu doc. Hilschera. $\square$

Úloha 13 (1 bod). Definujte průměrnou (střední) hodnotu $av(f) = av_{[0,1]}(f)$ funkce f spojité na intervalu $[0, 1]$.

Výsledek. Viz definici nazvanou „Průměr funkce“ v úvodu podkapitoly 3.6 ve skriptu doc. Hilschera. $\square$

Úloha 14 (2 body). Uveďte pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+12)^\alpha}\, dx$$

konverguje.

Výsledek. Zadaný nevlastní integrál konverguje právě pro $\alpha > 1$. $\square$

Úloha 15 (3 body). Vyjádřete funkce $\sin x$, $\cos x$ a e^x ve tvaru nekonečné mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Výsledek. Viz podkapitolu 4.7 ve skriptu doc. Hilschera. $\square$

Část III. (Celkem 10 bodů.)

Doplňme, že vyšetřením průběhu funkce f v níže uvedeném příkladu se rozumí „udat definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; spočítat limity

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

jestliže existují; určit body nespojitosti a jejich druh včetně příslušných jednostranných limit (pokud existují), nulové body (pokud existují) a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná; stanovit první (a druhou, je-li potřeba) derivaci; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; všechny asymptoty; vypočítat hodnoty ve význačných bodech (tím se rozumí vyčíslit funkci ve stacionárních a v inflexních bodech a nalézt průsečíky s osami, existují-li); načrtnout její graf“.

Příklad 16 (10 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}.$$

Výsledek. Funkce je definována i spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Není lichá, sudá ani periodická. Je záporná právě na intervalu $(1, +\infty)$. Jediným průsečíkem Gr f s osami je bod $[1, 0]$. V bodě 0 má f nespojitost druhého druhu a jejím oborem hodnot je $\mathbb{R}$, neboť

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Snadno lze spočítat, že

$$f'(x) = -\frac{x^3+2}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Jediným stacionárním bodem je $-\sqrt[3]{2}$. Funkce f roste na intervalu $[-\sqrt[3]{2}, 0)$; klesá na intervalech $(-\infty, -\sqrt[3]{2}]$, $(0, +\infty)$. V bodě $-\sqrt[3]{2}$ má tudíž lokální minimum $3/\sqrt[3]{4}$. Inflexní body daná funkce nemá. Je konvexní na celém svém definičním oboru. Asymptotou bez směrnice je přímka $x = 0$, přímka $y = -x$ poté asymptotou se směrnicí v $\pm\infty$. $\square$

Část IV. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 17 (2 body). Jestliže

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \quad \mathcal{M} = \left\{-\frac{1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \mathcal{J} = (0, 2] \cup [3, 5] \smallsetminus \{4\},$$

stanovte $\inf \mathbb{N}$, $\sup \mathcal{M}$, $\inf \mathcal{J}$ a $\sup \mathcal{J}$.

Výsledek. Zřejmě je

$$\inf \mathbb{N} = 1, \quad \sup \mathcal{M} = 0, \quad \inf \mathcal{J} = 0, \quad \sup \mathcal{J} = 5.$$

$\square$

Příklad 18 (4 body). Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \sin(\sin x)$ se středem v počátku (tj. pro $x_0 = 0$).

Výsledek. Hledaný polynom je

$$x - \frac{x^3}{3}.$$

$\square$

Příklad 19 (5 bodů). Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^3 - 1}\, dx.$$

Výsledek. Platí

$$\int \frac{1}{x^3 - 1}\, dx = \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \ln\left(x^2 + x + 1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Příklad 20 (3 body). Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}\right).$$

Výsledek. Součet dané řady je 5. □

Příklad 21 (3 body). Určete poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^{\sqrt{n}}}\, x^n.$$

Výsledek. Poloměr konvergence zadané mocninné řady je 1. Doplňme, že jejím oborem konvergence je interval $[-1, 1]$. □

Příklad 22 (3 body). Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$\frac{x^2}{x^3+5} + \frac{y^2}{y^3+3}\, y' = 0.$$

Výsledek. Výsledek je

$$\left(x^3+5\right)\left(y^3+3\right) = C,$$

přičemž $C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$. □

Část V. (Celkem 10 bodů za 2 příklady ze 3.)

Příklad 23 (5 bodů). Do rovnoramenného trojúhelníku o základně z a výšce v (nad základnou) vepište obdélník (jedna jeho strana bude částí základny trojúhelníku) s největším obsahem. Stanovte obsah S tohoto obdélníku.

Výsledek. Pro vyřešení příkladu postačuje uvažovat úlohu, kdy se snažíme vepsat do pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délek $z/2$ a v obdélník s maximálním možným obsahem, přičemž dvě jeho strany jsou částmi odvěsen tohoto trojúhelníku. Úlohu takto převedeme na otázku maximalizace funkce

$$f(x) = x\left(v - \frac{2vx}{z}\right)$$

na intervalu $I = [0, z/2]$. Neboť je

$$f'(x) = v - \frac{4v}{z}x \text{ pro všechna } x \in I, \quad f(0) = f\left(\frac{z}{2}\right) = 0, \quad f(x) \geq 0,\ x \in I,$$

v jediném svém stacionárním bodu $x_0 = z/4$ nutně nabývá funkce f maxima na I. Proto jsou sousední strany hledaného obdélníku dlouhé $z/2$ (dvojnásobek x_0: uvažte původní úlohu) a $v/2$ (což lze získat dosazením $z/4$ za x do výrazu $v - 2vx/z$). Tedy

$$S = \frac{vz}{4}.$$

□

Příklad 24 (5 bodů). Určete obsah ohraničeného rovinného obrazce vymezeného grafem funkce

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

a přímkami

$$y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2.$$

Výsledek. Výsledný obsah činí

$$4\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

□

Příklad 25 (5 bodů). Do čtverce o délce strany $a > 0$ je vepsán čtverec, jehož strany jsou spojnicemi středů stran zadaného čtverce. Do vepsaného čtverce je stejným způsobem vepsán další čtverec atd. Vypočítejte součet obsahů všech těchto (nekonečně mnoha) čtverců.

Výsledek. Výsledek je $2a^2$. Viz Příklad 53 z demonstrativních cvičení. $\square$