Písemná zkouška z MB102 – 7. 2. 2008

Zadání si ponecháváte. Odevzdáváte pouze (řádně vyplněný) přiložený list.

Část I. (Celkem 9 bodů.)

Ohledně instrukcí viz(te) přiložený list!

Část I. A. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 1. Pro každou dvojici čísel $a, b \in \mathbb{R}$ existuje sudá funkce $f^{a,b}$, která má v $+\infty$ a v $-\infty$ asymptotu $y = ax + b$.

Tvrzení 2. Existuje funkce f, která není integrovatelná na intervalu $[0,1]$, ale $|\, f \,|$ je na tomto intervalu integrovatelná.

Tvrzení 3. Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(3a_n + \pi) = 0$.

Část I. B. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 4. V alespoň jednom bodě intervalu $(0,4)$ má polynom $x\,(x-4)^5$ tečnu rovnoběžnou s osou x.

Tvrzení 5. Funkce

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sgn}(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

Tvrzení 6. Jsou-li funkce $a(x)$, $b(x)$ spojité na intervalu $I = (-1,1)$, má počáteční úloha $y' = a(x)\,y + b(x)$, $y(0) = 0$ právě jedno řešení na celém I.

Část I. C. (Celkem 3 body.)

Tvrzení 7. Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu, právě když má v tomto bodě obě jednostranné limity.

Tvrzení 8. Pokud je funkce f monotónní na $[-5,5]$, potom rovnost

$$\int_{-5}^{5} f(x)\, dx + \int_{5}^{-5} f(x)\, dx = 0$$

má smysl a platí.

Tvrzení 9. Pro libovolnou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je poloměr konvergence mocninných řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}\, x^n$$

stejný.

Část II. (Celkem 11 bodů.)

Úloha 10 (1 bod). Kolik existuje navzájem různých polynomů stupně nejvýše 4, které v bodech $x_0 = 5, x_1 = 55$ nabývají po řadě hodnot $y_0 = 55, y_1 = 5$ a jejichž první a druhá derivace v bodě x_0 je nulová?

Úloha 11 (3 body). Určete 12. derivaci funkce

$$f(x) = e^{2x} + \cos x + x^{10} - 5x^7 + 6x^3 - 11x + 3, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Úloha 12 (1 bod). Nechť je funkce $x = f(y)$ spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$ a má v bodě y_0 derivaci $f'(y_0) > 0$. Napište vzorec pro výpočet derivace inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ v bodě $x_0 = f(y_0)$.

Úloha 13 (1 bod). Definujte průměrnou (střední) hodnotu $av(f) = av_{[0,1]}(f)$ funkce f spojité na intervalu $[0, 1]$.

Úloha 14 (2 body). Uveďte pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+12)^\alpha}\, dx$$

konverguje.

Úloha 15 (3 body). Vyjádřete funkce $\sin x$, $\cos x$ a e^x ve tvaru nekonečné mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Písemná zkouška z MB102 – 7. 2. 2008

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO.

Část III. (Celkem 10 bodů.)

Doplňme, že vyšetřením průběhu funkce f v níže uvedeném příkladu se rozumí „udat definiční obor a obor hodnot; případnou lichost, sudost, periodicitu; spočítat limity

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

jestliže existují; určit body nespojitosti a jejich druh včetně příslušných jednostranných limit (pokud existují), nulové body (pokud existují) a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná; stanovit první (a druhou, je-li potřeba) derivaci; intervaly, na kterých funkce roste, klesá, či je konstantní; všechny stacionární a inflexní body; všechny lokální extrémy (pokud existují); intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní; všechny asymptoty; vypočítat hodnoty ve význačných bodech (tím se rozumí vyčíslit funkci ve stacionárních a v inflexních bodech a nalézt průsečíky s osami, existují-li); načrtnout její graf".

Příklad 16 (10 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}.$$

Část IV. (Celkem 20 bodů.)

Příklad 17 (2 body). Jestliže

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \quad \mathcal{M} = \left\{-\frac{1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \mathcal{J} = (0, 2] \cup [3, 5] \setminus \{4\},$$

stanovte $\inf \mathbb{N}$, $\sup \mathcal{M}$, $\inf \mathcal{J}$ a $\sup \mathcal{J}$.

Příklad 18 (4 body). Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \sin(\sin x)$ se středem v počátku (tj. pro $x_0 = 0$).

Příklad 19 (5 bodů). Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^3 - 1}\, dx.$$

Příklad 20 (3 body). Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}} \right).$$

Příklad 21 (3 body). Určete poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^{\sqrt{n}}}\, x^n.$$

Příklad 22 (3 body). Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$\frac{x^2}{x^3+5} + \frac{y^2}{y^3+3}\, y' = 0.$$

Část V. (Celkem 10 bodů.)

Počítáte 2 příklady ze 3 dle vlastní volby!

Příklad 23 (5 bodů). Do rovnoramenného trojúhelníku o základně z a výšce v (nad základnou) vepište obdélník (jedna jeho strana bude částí základny trojúhelníku) s největším obsahem. Stanovte obsah S tohoto obdélníku.

Příklad 24 (5 bodů). Určete obsah ohraničeného rovinného obrazce vymezeného grafem funkce

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

a přímkami

$$y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2.$$

Příklad 25 (5 bodů). Do čtverce o délce strany $a > 0$ je vepsán čtverec, jehož strany jsou spojnicemi středů stran zadaného čtverce. Do vepsaného čtverce je stejným způsobem vepsán další čtverec atd. Vypočítejte součet obsahů všech těchto (nekonečně mnoha) čtverců.