Matematika III – 13. přednáška
Aplikace vytvořujících funkcí

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

11. 12. 2007

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž `http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.
- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.

Opakování

Definice

(Obyčejnou) **vytvořující funkcí** posloupnosti $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

Exponenciální vytvořující funkcí posloupnosti $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ pak rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Poznámka

Používají se i další typy vytvořujících funkcí (např. v teorii čísel se používají Dirichletovy vytvořující funkce, kde roli faktoru x^n hraje n^{-x}), ale těmi se zde zabývat nebudeme.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení `[logický predikát]` – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, 0 v případě jeho nesplnění.
Např. $[n = 1], [2|n]$ apod.
Pro vyjádření koeficientu u x^n ve vytvořující funkci $F(x)$ se pak často používá zápis $[x^n]F(x)$.

Operace s vytvořujícími funkcemi

- Sčítání dvou posloupností člen po členu.
- Vynásobení všech členů posloupnosti stejným skalárem.
- Posunutí posloupnosti doprava.
- Posunutí posloupnosti doleva.
- Vynásobení n-tého členu posloupnosti skalárem α^n.
- „Nafouknutí“ posloupnosti nulami.
- Vynásobení n-tého členu posloupnosti číslem n.
- Vydělení n-tého členu posloupnosti číslem n.
- Konvoluce posloupností $c_n = \sum_{0 \le k \le n} a_k b_{n-k}$.

Základní přehled

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \qquad (1, 1, 1, \ldots)$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}, \qquad (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots)$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \qquad (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24} \ldots)$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad (0, 1, 0, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{120}, \ldots)$$

$$\cos x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad (1, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{24}), 0, \ldots)$$

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k, \qquad (1, r, \binom{r}{2}, \binom{r}{3}, \ldots)$$

Základní přehled – odvozené vztahy

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, \qquad (1, -1, 1, -1, \ldots)$$

$$\frac{1}{1-x^m} = \sum_{n\geq 0} [m|n] x^n, \qquad (1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, \ldots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n, \qquad (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} x^n, \qquad \left(1, c, \binom{c+1}{2}, \binom{c+2}{3}, \ldots\right)$$

$$\frac{1}{1-rx} = \sum_{n\geq 0} r^n x^n, \qquad (1, r, r^2, r^2, r^3, \ldots)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} x^n \qquad \left(0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\right)$$

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
4. Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^n udává a_n, tj. $a_n = [x^n]A(x)$.

Rozklad na parciální zlomky

Jak jsme již viděli na příkladu Fibonacciho posloupnosti, v kroku 4 často s výhodou využijeme **rozkladu na parciální zlomky**. Ten jsme již viděli dříve (často se používá při integraci racionálních lomených funkcí), proto připomeneme jen stručně:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde st $P <$ st Q (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak
$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x-\alpha_\ell}.$$
- Má-li kořen α násobnost k, pak jsou příslušné parciální zlomky tvaru
$$\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

Rozklad na parciální zlomky – pokr.

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele. (V našich úlohách ale raději rozložíme i kvadratické faktory na lineární výpočtem kořenů v $\mathbb{C}$.)
- Neznámé dopočítáme buď roznásobením a porovnáním koeficientům u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.
- Výrazy $A/(x-\alpha)^k$ převedeme na výrazy tvaru $B/(1-\beta x)^k$ vydělením čitatele i jmenovatele výrazem $(-\alpha)^k$. Tento výraz již umíme rozvinout do mocninné řady.

Pěstované binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n pěstovaných binárních stromů na n vrcholech. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro $n \geq 1$ vyhovuje b_n rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Vidíme, že jde vlastně o konvoluci posloupností. Vztah upravíme, aby platil pro všechna $n \in N_0$:

$$b_n = \sum_{0 \leq k < n} b_k b_{n-k-1} + [n = 0].$$

Tím máme hotov krok 1.

V kroku 2 vynásobíme obě strany x^n a sečteme. Je-li $B(x)$ odpovídající vytvořující funkce, pak:

$$
\begin{aligned}
B(x) &= \sum_n b_n x^n = \sum_{n,k} b_k b_{n-k-1} x^n + \sum_{n,k} [n=0] x^n = \\
&= \sum_k b_k x^k \left(\sum_n b_{n-k-1} x^{n-k} \right) + 1 = \\
&= \sum_k b_k x^k (xB(x)) + 1 = B(x) \cdot xB(x) + 1.
\end{aligned}
$$

Pozorný čtenář si jistě povšiml, že ve výše uvedeném výpočtu jsme nahradili konvoluci $b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0$ vztahem $b_n = b_0 b_{n-1} + \cdots + b_{n-1} b_0 + b_n b_{-1} + b_{n+1} b_{-2} + \cdots$. Díky naší konvenci to ale není problém a velmi to usnadňuje práci se sumami (s nekonečnými součty se zde pracuje podstatně snadněji než s konečnými, kdy musíme neustále hlídat meze).

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Znaménko $+$ ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro $x \to 0_+$ $B(x)$ měla limitu ∞, zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$.
Zbývá už pouze krok 4, tedy rozvinout $B(x)$ do mocninné řady. Rozvoj získáme pomocí zobecněné binomické věty

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{k\geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^k$$

a po vydělení $1 - \sqrt{1-4x}$ výrazem $2x$ dostaneme

$$\begin{aligned} B(x) =& \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^{k-1} = \\ =& \sum_{n\geq 0} \binom{-1/2}{n} \frac{(-4x)^n}{n+1} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}. \end{aligned}$$

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z $[0, 0]$ do $[n, n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet různých triangulací konvexního $(n + 2)$-úhelníku.

Ještě jeden příklad

Příklad

Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

Řešení

Tato rekurence je opět jiného typu než dosud studované. Jako vždy neuškodí vypsání prvních několika členů posloupnosti (teď ale ani moc nepomůže, snad jen pro kontrolu správnosti výsledku).[a]

[a] Narozdíl od tvrzení v *Concrete mathematics* je již možné tuto posloupnost nalézt v *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.
- Krok 3:
$$A(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1 - 2x)(1 + x)^2}.$$
- Krok 4: $a_n = \frac{7}{9}2^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right)(-1)^n$.

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).
Najdeme rekurzívní vztah – diskusí chování „na kraji“ zjistíme, že $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$, $r_n = c_{n-2} + r_{n-2}$, $r_0 = 0, r_1 = 1$, kde r_n je počet pokrytí obdélníku $3 \times n$, ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.
- Krok 3:
  $$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$
- Krok 4: Vidíme, že obě funkce jsou funkcemi z^2, ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci $D(x) = 1/(1 - 4x + x^2)$, pak totiž $C(x) = (1 - x^2)D(x^2)$, tj.
  $[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1 - x^2)D(x^2) = [x^n](1 - x)D(x)$, a tedy $c_{2n} = d_n - d_{n-1}$.

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká n zanedbatelný a pro všechna n leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lceil \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} \right\rceil.$$

Např. $c_{20} = 413403$.