Matematika III – 14. přednáška
Aplikace vytvořujících funkcí – další úlohy

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

18. 12. 2007

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž `http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.
- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkci n. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
4. Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^n udává a_n, tj. $a_n = [x^n]A(x)$.

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).
Najdeme rekurzívní vztah – diskusí chování „na kraji“ zjistíme, že $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$, $r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$, $r_0 = 0, r_1 = 1$, kde r_n je počet pokrytí obdélníku $3 \times n$, ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

Řešení (pokr.)

Hodnoty c_n a r_n pro několik malých n jsou:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
c_n	1	0	3	0	11	0	41	0
r_n	0	1	0	4	0	15	0	56

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.
- Krok 3:
  $$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$
- Krok 4: Vidíme, že obě funkce jsou funkcemi x^2, ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci $D(z) = 1/(1 - 4z + z^2)$, pak totiž $C(x) = (1 - x^2)D(x^2)$, tj.
  $[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1 - x^2)D(x^2) = [x^n](1 - x)D(x)$, a tedy $c_{2n} = d_n - d_{n-1}$.

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká n zanedbatelný a pro všechna n leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lceil \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} \right\rceil.$$

Např. $c_{20} = 413403$.

Exponenciální vytvořující funkce

Někdy mívá vytvořující funkce posloupnosti (a_n) komplikované vlastnosti, přičemž posloupnost $(a_n/n!)$ má vytvořující funkci daleko jednodušší. V takových případech raději pracujeme s tzv. **exponenciálními vytvořujícími funkcemi**

$$\widehat{A}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Jméno vychází z toho, že vytvořující funkcí *základní* posloupnosti $(1, 1, 1, 1, \dots)$ je e^x.
Zdůrazněme, že exponenciální vytvořující funkce se od obyčejných liší i standardními operacemi.

- Vynásobením x získáme funkci posloupnosti (na_{n-1}).
- Derivací získáme funkci odpovídající posunutí doleva.
- Integrací získáme funkci odpovídající posunutí doprava.
- Součinem dvou funkcí $\widehat{F}(x)$ a $\widehat{G}(x)$ získáme funkci $\widehat{H}(x)$, která odpovídá posloupnosti $h_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k g_{n-k}$, tzv. *binomické konvoluci* f_n a g_n.

Příklad

Řešte rekurenci danou vztahy $g_0 = 0, g_1 = 1$ a předpisem

$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k}.$$

Řešení

Vzhledem k rekurentnímu vztahu, který obsahuje binomickou konvoluci posloupností, se zdá vhodné využít *exponenciálních vytvořujících funkcí*. Označme $\widehat{G}(x)$ příslušnou exponenciální mocninnou řadu. Budeme postupovat v obvyklých čtyřech krocích.

- Krok 1: $g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k} + [n = 1]$.
- Krok 2: $\widehat{G}(x) = -2x\widehat{G}(x) + \widehat{G}(x)^2 + x.$

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím vztahů

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

a

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1}{2k} \cdot \binom{-1/2}{k-1}$$

postupně dostaneme

Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Odtud, protože

$$\sum_{n\geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} = \widehat{G}(x) = \frac{1+2x-\sqrt{1+4x^2}}{2},$$

máme $g_{2k+1} = 0$ a

$$g_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} \cdot (2k)! = (-1)^k \cdot (2k)! \cdot C_{k-1},$$

kde C_n je n-té Catalanovo číslo.

Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.
Označme pro jednoduchost $t_n = \kappa(K_n)$. Již dříve jsme viděli, že $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 3$. Lze rovněž snadno spočítat $t_4 = 16$.
Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní.
Pak pro $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1,\ldots,k_m} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

Např. pro $n = 4$ máme $t_4 = 3t_3 + 6t_1t_2 + t_1^3$.

Ošklivě vypadající rekurenci zjednodušíme substitucí $u_n = nt_n$. Dostáváme pro $n > 1$

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

a je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u x^{n-1} v m-té mocnině řady $\widehat{U}(x) = \sum u_n \frac{x^n}{n!}$. Proto je

$$\frac{u_n}{n!} = [x^{n-1}] \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \widehat{U}(x)^m,$$

a tedy

$$\widehat{U}(x) = \mathrm{e}^{x\widehat{U}(x)}.$$

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk+1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = \mathrm{e}^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.
Fakt: $\ln \mathcal{E}_t(x) = x \cdot \mathcal{E}_t(x)$, tj. spec. $\mathcal{E}(x) = \mathrm{e}^{x\mathcal{E}(x)}$.
Srovnáním tohoto vztahu s výše uvedeným $\widehat{U}(x) = \mathrm{e}^{x\widehat{U}(x)}$ vidíme, že $\widehat{U}(x) = x\mathcal{E}(x)$.
Proto

$$t_n = \frac{u_n}{n} = \frac{n!}{n}[x^n]\widehat{U}(x) = (n-1)![x^{n-1}]\mathcal{E}(x) = n^{n-2}.$$