

Matematika III – 1. přednáška

Funkce více proměnných: křivky, směrové derivace

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

18. 9. 2007

Obsah přednášky

- 1 Literatura
- 2 Zobrazení a funkce více proměnných
 - Funkce více proměnných
 - Topologie euklidovských prostorů
 - Křivky v euklidovských prostorech
 - Limita a spojitost funkce
- 3 Parciální a směrové derivace
 - Parciální derivace
 - Směrové derivace

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).
- *Předmětové záložky v IS MU*

V diferenciálním a integrálním počtu funkcí jedné proměnné jsme se (jak už název napovídá) zabývali zobrazeními

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Přirozeně se nabízí otázka, jak příslušné pojmy zobecnit pro případ zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Začneme dvěma speciálními případy:

- $n=1$ – funkce více proměnných
- $m=1$ – křivka v prostoru \mathbb{R}^n

Definice

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *reálná funkce více proměnných* (ty obvykle značíme x_1, \dots, x_n). Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z . To znamená, že funkce f definované v „prostoru“ $E_n = \mathbb{R}^n$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

a např. funkce f definované v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována.

(Častým úkolem - nejen - v písemkách bývá nalézt k dané formuli pro funkci co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

Definiční obor funkce

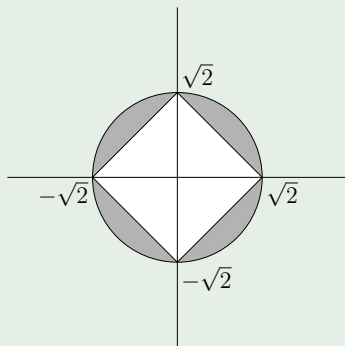
Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

Řešení

Funkce \arccos připouští argument pouze z intervalu $[-1, 1]$, odmocnina připouští pouze nezáporný argument. Definičním oborem je tedy množina bodů (x, y) vyznačená na obrázku.



Definice

Grafem funkce více proměnných je podmnožina

$G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ splňující

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)); (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

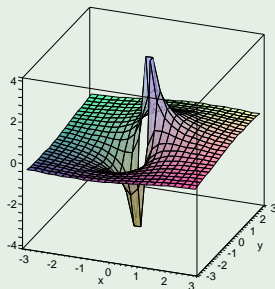
kde A je definiční obor funkce f .

Příklad

Grafem funkce definované v E_2

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku,
maximálním definičním
oborem je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice funkce f na úrovni c* .

Zřejmě jde v případě vrstevnice na úrovni c o přímou analogii řezu grafu funkce f rovinou $z = c$. Pro představu o grafu funkce dvou proměnných jsou samozřejmě užitečné rovněž řezy rovinami $x = 0$ (*bokorys*), $y = 0$ (*nárys*), $z = 0$ (*půdorys*).

Příklad

Pomocí vrstevnic a řezů určete graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení

Viz ilustrace v programu Maple.

Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením \mathbb{R}^n , což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na \mathbb{R}^n definován standardní skalární součin

$u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.

Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|Q - P\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|Q - P\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q . Např. v E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána

$$\|P_2 - P_1\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Trojúhelníková nerovnost pro každé tři body P, Q, R

$$\|R - P\| = \|(Q - P) + (R - Q)\| \leq \|(Q - P)\| + \|(R - Q)\|.$$

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n :

Definice

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j (nebo taky $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$ pro všechna $i, j > N$ a vhodné $N \in \mathbb{N}$),
- *konvergentní posloupnost* – $\|P_i - P\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,
- *hromadný bod* P množiny $A \subset E_n$ – existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P ,

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ -okolí bodu P* – množina
 $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n; \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod P množiny A* – každé δ -okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* – existuje δ -okolí bodu P , které celé leží uvnitř A ,
- *ohraničená množina* – leží celá v nějakém δ -okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),
- *kompaktní množina* – uzavřená a ohraničená množina.

Pozn: pozor na kvantifikátory!

Věta

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,*
- 2 každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
- 3 každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
- 4 A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*
- 5 A je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné podpokrytí,*

Věta

- 1 *Jsou-li $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřené, je otevřená i množina $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.*
- 2 *Jsou-li $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ uzavřené, je uzavřená i množina $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.*
- 3 *Jsou-li $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktní, je kompaktní i množina $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.*

Křivky

Už na příkladu s vrstevnicemi jsme viděli příklad „prostorových“ křivek.

Definice

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$.

Je třeba rozlišovat křivku a její obraz v E_n :

Příklad

Obrazem křivky $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$ v rovině E_2 je jednotková kružnice, stejně jako v případě **jiné** křivky $t \mapsto (\cos(t^3), \sin(t^3))$, $t \in \mathbb{R}$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definice

- *Limita*: $\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace*: $c'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál*: $\int_a^b c(t) dt \in \mathbb{R}^n$.

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách.

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a primitivní funkce (= antiderivace) pro křivky:

Věta

Je-li $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ křivka spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje její Riemannův integrál $\int_a^b c(t)dt$. Navíc je křivka

$$C(t) = \int_a^t c(s)ds \in \mathbb{R}^n$$

dobře definovaná, diferencovatelná a platí $C'(t) = c(t)$ pro všechny hodnoty $t \in [a, b]$.

Poznámka

Ne vše funguje tak jako u funkcí jedné proměnné:

Věta o střední hodnotě dává pro křivku $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ existenci čísel t_i takových, že

$$c_i(b) - c_i(a) = (b - a) \cdot c'_i(t_i).$$

Tato čísla ale **budou obecně různá**, nemůžeme proto vyjádřit rozdílový vektor koncových bodů $c(b) - c(a)$ jako násobek derivace křivky v jediném bodě.

Např. v rovině E_2 pro $c(t) = (x(t), y(t))$ takto dostáváme

$$c(b) - c(a) = (x'(\xi)(b - a), y'(\eta)(b - a)) = (b - a) \cdot (x'(\xi), y'(\eta))$$

pro dvě (obecně různé) hodnoty $\xi, \eta \in [a, b]$.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření \mathbb{R}^n daný derivací.

Přímka zadaná parametricky $T : c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0 , narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c .

V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2)$, $t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.

$$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t), \quad c''(t) = (-\cos t, 0, 2),$$

$$c'(0) = (0, 1, 0), \quad \|c'(0)\| = 1, \quad c''(0) = (-1, 0, 2).$$

Zrychlení ve směru tečny je pak $\frac{1}{\|c'(0)\|} (c'(0) \cdot c''(0))$.

Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu L , jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Obdobně jde (při vhodné definici okolí) limitu definovat i v „nevlastních“ bodech (kterých je pro $n \geq 1$ již 2^n). Má-li mít funkce v daném bodě limitu, nesmí záležet na „cestě“, po které k danému bodu konvergujeme (analogie limit zleva a zprava u funkcí jedné proměnné).

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách^a,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x) + d \cdot g(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) + d \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

- *multiplikativita, divisibilita,*
- *je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a funkce $g(x)$ je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu x , pak*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$

^aněkdy také *o dvou policajtech* :)

Příklad

Vypočtete limitu funkce $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0, 0)$.

Příklad

Vypočtete limitu funkce $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ v bodě $(0, 0)$.

Příklad

Vypočtete limitu funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $(0, 0)$.

Spojitosť funkce

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v a vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Věta (Weierstrassova)

Spojité funkce na kompaktní množině zde nabývá maxima i minima.

Věta (Bolzanova)

*Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na otevřené **souvislé** množině A . Jsou-li $a, b \in A$ takové, že $f(a) < 0 < f(b)$, pak existuje $c \in A$ tak, že $f(c) = 0$.*

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstantní.

Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) \right),$$

říkáme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě (x_1^*, \dots, x_n^*) parciální derivaci podle proměnné x_i a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$).

Podobně jako v případě jedné proměnné, pokud má funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ parciální derivace ve všech bodech nějaké otevřené množiny, jsou tyto derivace rovněž funkcemi z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} .

Pro funkce v E_2 dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)) = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.\end{aligned}$$

Poznámka

Parciální derivace funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ podle x v bodě (x_0, y_0) udává směrnici tečny v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ke křivce, která je průsečíkem grafu G_f s rovinou $y = y_0$.

Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

Příklad

Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x=0 \text{ nebo } y=0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $(0, 0)$ obě parciální derivace nulové, přitom v tomto bodě neexistuje limita, a tedy není ani spojitá.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)),$$

často značíme rovněž $f_v(x)$.

Speciální volbou jednotkových vektorů ve směru souřadných os dostáváme právě *parciální derivace funkce* f .

Směrové derivace jsou definovány pomocí derivací jedné proměnné, proto tam platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x)$, $d_v g(x)$ funkcí $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

- 1 $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, pro libovolné $k \in \mathbb{R}$,
- 2 $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
- 3 $d_v(fg)(x) = d_v f(x) g(x) + f(x) d_v g(x)$,
- 4 pro $g(x) \neq 0$ je $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)} (d_v f(x) g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Poznámka

Neplatí ale aditivita vzhledem ke směrům:

$$d_{u+v} f(x) \neq d_u f(x) + d_v f(x)$$

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$$

mimo počátek a $f(0, 0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá.

Ke spojitosti potřebujeme silnější pojem, tzv. *totální diferenciál*, který si zavedeme příště.