Matematika III – 5. přednáška
Lineární programování, integrace funkcí více proměnných

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

16. 10. 2007

Obsah přednášky

1. Lineární programování
2. Integrální počet více proměnných
   - Integrály závislé na parametru
   - Integrace funkcí více proměnných
   - Násobné integrály
   - Záměna souřadnic při integraci

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Ján Plesník, Jitka Dupačová, Milan Vlach, Lineárne programovanie, Alfa, 1990.
- Boris Pavlovič Děmidovič, Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003.

Lineární programování

Úloha lineárního programování
Pro daná $c \in \mathbb{R}^n$ řeší lineární programování úlohu optimalizovat (tj. maximalizovat nebo minimalizovat) lineární *účelovou funkci*

$$f(x) = c \cdot x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

za daných (lineárních) omezení

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x &\leq b_1 \\ &\dots \\ a_k \cdot x &\leq b_k \\ a_{k+1} \cdot x &= b_{k+1} \\ &\dots \\ a_\ell \cdot x &= b_\ell \end{aligned}$$

Lineární programování

Lze ukázat, že každou (rozumnou) úlohu lineárního programování lze převést na tzv. *kanonický tvar*

$$\text{maximalizovat} \qquad f(x) = c \cdot x$$

za podmínek

$$a_1 \cdot x \leq b_1$$
$$\dots$$
$$a_k \cdot x \leq b_k,$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

Převody:

- minimalizace $c \cdot x \; \rightarrow$ maximalizace $(-c) \cdot x$
- nerovnice $\leftrightarrow$ rovnice (doplňková proměnná, resp. nahrazení rovnice dvojicí nerovnic)
- reálná proměnná $x \; \rightarrow$ nezáporné proměnné (substituce $x = x^+ - x^-$, $x^+ \geq 0, x^- \geq 0$).

Grafické řešení úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování má pro 2 proměnné graficky názorný způsob řešení, vycházející z obodobného přístupu jako v případě vázaných extrémů.

V rovině si znázorníme množinu, vyhovující všem omezujícím podmínkám a pomocí vrstevnic účelové funkce najdeme bod(y) této množiny, kde nabývá účelová funkce extrémů.

Podrobněji ukážeme (spolu s řešením pomocí tzv. simplexové metody) s využitím appletu z `http://www.uni-leipzig.de/~wifaor/orschuhr/Simplex/InitOSI.html`.

Simplexová metoda

Standardní úlohu řeší klasická Simplexová metoda (George Dantzig, 1947).
Úvodní fáze spočívá v nalezení nějakého vrcholu na polytopu (zobecnění polyedru na více dimenzí), který je tvořen body vyhovujícími podmínkám. V dalších krocích postupuje po hranách do vrcholů s vyšší hodnotou účelové funkce.
Sice je ukázán příklad podmínek, kdy simplexová metoda projde nešikovně všech 2^n vrcholů (jde o příklad zborcené n-rozměrné krychle), a tedy metoda je v nejhorším případě exponenciální, ale v praxi je obvykle pozoruhodně úspěšná (kolem roku 2000 bylo dokázáno, že očekávaný čas běhu na náhodném vstupu je polynomiální).

Příklad

Maximalizujte $f = 2x - 3y + 4z$ za podmínek

$$\begin{aligned} 4x - 3y + z &\leq 3 \\ x + y + z &\leq 10 \\ 2x + y - z &\leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Řešení

Převedeme úlohu z kanonického do *standardního* tvaru – k tomu stačí zavést doplňkové proměnné u, v, w. Maximalizujeme

$$\begin{array}{ccccr} 4x - 3y & +z + u & & & = 3 \\ x + y & +z & +v & & = 10 \\ 2x + y & -z & & +\, w & = 10 \\ \hline -2x + 3y & -4z & & & +f = 0 \end{array}$$

Řešení (pokračování)

Úlohu přepíšeme do tzv. *simplexové tabulky*.

	x	y	z	u	v	w	
u	4	-3	1	1	0	0	3
v	1	1	1	0	1	0	10
w	2	1	-1	0	0	1	10
f	-2	3	-4	0	0	0	0

V posledním řádku odpovídajícím účelové funkci najdeme **některou zápornou hodnotu** (*heuristika: největší v abs. hodnotě*), což odpovídá tomu, že se snažíme postupovat po hraně *ve směru* proměnné odpovídající příslušnému sloupci. Krajní vrchol této hrany najdeme tak, že najdeme minimum z podílů $3/1, 10/1$ absolutních členů a **kladných** koeficientů u proměnné, v jejímž směru se snažíme postupovat. V našem případě půjde o sloupec proměnné z a eliminovat budeme pomocí 1. řádku („pivot“ je 1). Tento řádek označíme stejně jako dotyčný sloupec (*proměnná přejde do báze*).

Řešení (pokračování)

$$
\begin{array}{c|rrrrrr|r}
 & x & y & z & u & v & w & \\
z & 4 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
v & -3 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 7 \\
w & 6 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 13 \\
\hline
f & 14 & -9 & 0 & 4 & 0 & 0 & 12
\end{array}
$$

Nyní máme jediný záporný prvek v posledním řádku (sloupec y) a v něm jediný kladný prvek, proto pivotujeme podle 4 ve 2. řádku.

Řešení (dokončení)

	x	y	z	u	v	w	
z	$\frac{7}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{33}{4}$
y	$-\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{7}{4}$
w	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{33}{2}$
f	$\frac{29}{4}$	0	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{111}{4}$

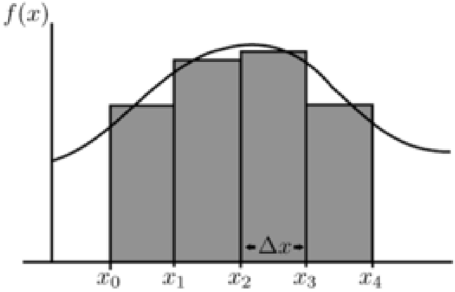
Nyní již máme všechny prvky v posledním řádku kladné, dosáhli jsme tedy maxima

$$f = \frac{111}{4}$$

pro $z = \frac{33}{4}$, $y = \frac{7}{4}$ a $w = \frac{33}{2}$. Původní proměnná x je nyní nebazická (x není uvedeno jako označení žádného řádku nebo ekvivalentně: sloupec x není eliminovaný), což odpovídá $x = 0$.

Připomenutí: Riemannův integrál

Motivace: výpočet plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x na uzavřeném intervalu.
Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedné proměnné ohraničená na uzavřeném intervalu $[a, b]$).



Zvolíme dělení $D = \{x_1 = a, \dots, x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ a hledaný integrál (tj. *plochu pod grafem*) aproximujeme součtem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

kde $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ je libovolný. (Součet ploch obdélníků pod křivkou).
Je-li *norma dělení* (tj. maximum z délek intervalů $[x_i, x_{i+1}]$) *malá*, pak výše uvedená suma je velmi blízko zmíněné ploše (přesněji pomocí nulové posloupnosti dělení a limit).

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Aplikace:

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$,
- délka křivky zadané parametricky $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt$,
- objem rotačního tělesa $\pi \int_a^b f^2(x)dx$,
- povrch pláště rotačního tělesa $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$.

Integrály závislé na parametru

Jestliže integrujeme podle jedné proměnné x funkci $n+1$ proměnných $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, potom výsledek bude funkcí $F(y_1, \ldots, y_n)$ ve zbývajících n proměnných.

Věta (O záměně derivace a integrálu)

Pro spojitě diferencovatelnou funkci $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ definovanou pro x z konečného intervalu $[\alpha, \beta]$ a na nějakém okolí bodu $a = [a_1, \ldots, a_n] \in E_n$ uvažujme integrál

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \int_\alpha^\beta f(x, y_1, \ldots, y_n)dx.$$

Potom platí pro všechny indexy $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(a) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, a_1, \ldots, a_n)dx.$$

Integrace funkcí více proměnných

Obdobně jako v případě jedné proměnné můžeme potřebu zavedení integrálu více proměnných motivovat výpočtem objemu trojrozměrného prostoru pod grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných.

Místo výběru malých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části objemu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce f v reprezentantu tohoto intervalu ξ_i, tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.

Co jsou obory integrace?

Nejjednodušším přístupem je uvažovat pouze obory integrace S, které jsou dány jako součiny intervalů, tj. jsou zadány rozsahem $x \in [a, b]$ a $y \in [c, d]$.

Hovoříme v této souvislosti o **vícerozměrném intervalu**.

Pokud je S jiná ohraničená množina v $\mathbb{R}^2$, pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastí $[a, b] \times [c, d]$, ale upravíme naši funkci tak, že $f(x, y) = 0$ pro všechny body mimo S.
Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.
Integrál existuje, jestliže pro každou volbu posloupnosti dělení Ξ (nyní ve všech proměnných zároveň) a reprezentantů jednotlivých krychliček

$$\xi_{i,\dots,j} \in [x_i, x_{i+1}] \times \dots \times [z_j, z_{j+1}] \subset \mathbb{R}^n,$$

s maximální velikostí mezi všemi použitými intervaly jdoucí k nule, budou integrální součty

$$S_{\Xi,\xi} = \sum_{i,\dots,j} f(\xi_{i,\dots,j})(x_{i+1} - x_i) \dots (z_{j+1} - z_j).$$

konvergovat k jedné hodnotě, kterou zapisujeme

$$\int_S f(x, \dots, z) dx \dots dz$$

Pro všechny spojité funkce f lze opět dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek lze snadno rozšířit pro „dostatečně spojité“ funkce na „dostatečně rozumných“ oborech integrace.

Definice

Omezenou množinu $S \subset E_n$ označujeme za **Riemannovsky měřitelnou**, jestliže je její charakteristická funkce, definovaná $\chi(x) = 1$ pro $x \in S$ a $\chi(x) = 0$ jinak, Riemannovsky integrovatelná.

Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočíst (kromě využití výpočetní techniky, kdy je přímé použití definice na místě), okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):

Věta

Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na vícerozměrném intervalu $S \subset E_n$ je vektorovým prostorem a Riemannův integrál je na něm lineární formou.
Pokud je obor integrace S zadán jako disjunktní sjednocení konečně mnoha Riemannovsky měřitelných oborů S_i, je integrál funkce f přes S dán součtem integrálů přes obory S_i.

Příklad

Vypočtěte dvojný integrál

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} xy \, dxdy$$

jako limitu integrálního součtu.

Řešení

Za nulovou posloupnost dělení uvážíme posloupnost $(D_n)_{n=1}^{\infty}$, kde n-té dělení dostaneme pomocí přímek $x = i/n, y = j/n$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$, přičemž hodnoty $\xi_{i,j}$ budeme vybírat z pravých horní rohů dělících čtverečků.

Řešení (dokončení)

Pak

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} xy\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{0\le i,j<n} \frac{(i+1)}{n}\frac{(j+1)}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{1\le i,j\le n} ij =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left(\sum_{1\le i\le n} i\right)\left(\sum_{1\le j\le n} j\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}.$$

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd. (Zejména tedy i případy, kdy jsou funkce $\varphi, \psi, \eta, \zeta$ konstantní.)

Věta

V případě množiny S zadané jako výše a Riemannovsky integrovatelné funkce f na S je Riemannův integrál vyčíslen formulí

$$\int_S f(x, y, \dots, z) dx \dots dz =$$

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \dots \left(\int_{\eta(x,y,\dots)}^{\zeta(x,y,\dots)} f(x, y, \dots, z) dz \right) \dots dy \right) dx$$

Přímým důsledkem pro konstatní funkce je:

Věta

Pro vícerozměrný interval $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ a spojitou funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ na S je násobný integrál

$$\int_S f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \ldots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \right) \ldots \right) dx_n$$

nezávislý na pořadí, ve kterém postupně integraci provádíme.

Příklad (nezávislé meze integrace)

Vypočtěte dvojný integrál

$$I = \int_{[0,1]\times[0,3]} 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2\, dxdy.$$

Řešení

S využitím předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left(\int_0^1 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2\, dx \right) dy = \\ &= \int_0^3 \left[(x-1)^3 + x(y-2)^2 + 2x \right]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^3 (y-2)^2 + 3\, dy = [\tfrac{1}{3}(y-2)^3 + 3y]_0^3 = 12 \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme i při integraci v opačném pořadí.

Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtěte integrál

$$I = \int_S xy^2 \, dxdy,$$

kde S je plocha v 1. kvadrantu E_2 ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.

Řešení

Snadno je vidět, že grafy se protínají v bodech $[0, 0]$ a $[1, 1]$, přičemž pro $x \in [0, 1]$ je $x^2 \leq x$. Proto je

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} xy^2 \, dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[xy^3 \right]_{y=x^2}^{x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^4 - x^7) \, dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{40}.$$

Záměna souřadnic při integraci

Při výpočtu integrálů funkcí jedné proměnné jsme používali transformace souřadnic jako mimořádně silný nástroj. Obdobně lze transformace využívat pro integrály funkcí více proměnných. Připomeňme nejdříve, jak je to s transformacemi pro jednu proměnnou:Integrovaný výraz $f(x)dx$ vyjadřuje plochu obdélníčku určeného (linearizovaným) přírůstkem proměnné x a hodnotou $f(x)$. Pokud proměnnou transformujeme vztahem $x = u(t)$, vyjadřuje se i linearizovaný přírůstek jako

$$dx = \frac{du}{dt}dt$$

a proto i příslušný příspěvek pro integrál je vyjádřen jako

$$f(u(t))\frac{du}{dt}dt,$$

přičemž buď předpokládáme, že znaménko derivace $u'(t)$ je kladné, nebo dojde k obrácení mezí integrálu, takže ve výsledku se znaménko neprojeví.

Intuitivně je postup v n proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů.

Věta

Nechť $G(t_1, \dots, t_n) : E_n \to E_n$, $[x_1, \dots, x_n] = G(t_1, \dots, t_n)$, je spojitě diferencovatelné zobrazení, T a $S = G(T)$ jsou Riemannovsky měřitelné množiny a $f : S \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Potom platí

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots x_n = \int_T f(G(t_1, \dots, t_n)) |\det(D^1 G(t_1, \dots, t_n))| dt_1 \dots dt_n.$$

Podrobný formální důkaz nebudeme uvádět, je však přímočarou realizací výše uvedené úvahy ve spojení s definicí Riemannova integrálu.

Abychom si přiblížili obsah tvrzení poslední věty, uvedeme jeho speciální případ pro integrál funkce $f(x,y)$ ve dvou proměnných a transformaci

$$G(s,t) = (g(s,t), h(s,t)).$$

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x,y)dxdy = \int_T f(g(s,t),h(s,t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s} \right| dsdt.$$

Konkrétně: spočtěme integrál z charakteristické funkce kružnice o poloměru R (tj. její plochu) definovanou v polárních souřadnicích. Nejprve spočítáme Jacobiho matici transformace $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$D^1G = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Proto je determinant z této matice roven

$$\det D^1G(r,\varphi) = r(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r.$$

Můžeme tedy přímo počítat pro kružnici S o poloměru R, která je obrazem obdélníku $(r, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi] = T$:

$$\int_S dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r\, dr\, d\varphi = \int_0^R 2\pi r\, dr = \pi R^2.$$

Příklad (využití polárních souřadnic)

Zjednodušte dvojný integrál

$$I = \int_{x^2+y^2\leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\, dxdy$$

na jednoduchý přechodem k polárním souřadnicím.

Řešení

Z předchozího víme, že při transformaci $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ je determinant Jacobiho matice roven r. Proto

$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 f(r)\cdot r\, dr\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^1 f(r)\cdot r\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) dr = 2\pi\int_0^1 f(r)\cdot r\, dr.$$

Časté transformace spouřadnic v E_3

Válcové souřadnice Zobrazení
$G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}\} \to E_3$ je dáno předpisem

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi\ z = z,$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Proto je det $D^1 G = r$.

Časté transformace spouřadnic v E_3

Sférické souřadnice Zobrazení
$G : \{[r, \theta, \varphi]; r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\} \to E_3$ je dáno předpisem

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \;\; y = r \sin\theta \sin\varphi, \;\; z = r \cos\theta,$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Proto je

$$\begin{aligned} \det D^1 G &= r^2 \sin^3\theta \sin^2\varphi + r^2 \cos^2\theta \sin\theta \cos^2\varphi + \\ &\quad + r^2 \cos^2\theta \sin\theta \sin^2\varphi + r^2 \sin^3\theta \cos^2\varphi = \\ &= r^2 \sin^3\theta + r^2 \cos^2\theta \sin\theta = r^2 \sin\theta. \end{aligned}$$

Příklad

Vypočtěte integrál

$$I = \int_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

kde množina V je vymezena plochou $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Řešení

Transformací do sférických souřadnic dostáváme (grafem plochy je koule se středem v $[0, 0, 1/2]$ a poloměrem $1/2$) – promyslete meze!

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} r \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$
$$= \ldots = \frac{\pi}{10}.$$