

# Matematika III – 6. přednáška

## Integrace funkcí více proměnných

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

23. 10. 2007

# Obsah přednášky

- 1 Integrální počet více proměnných
  - Záměna souřadnic při integraci
  - Některá využití integrálů více proměnných ve fyzice
  
- 2 Numerická integrace
  - Numerické derivování
  - Numerická kvadratura

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Boris Pavlovič Děmidovič, Sběrka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003.
- Emil Vitásek, Numerické metody, SNTL, 1987.

## Záměna souřadnic při integraci

Při výpočtu integrálů funkcí jedné proměnné jsme používali transformace souřadnic jako mimořádně silný nástroj.

Obdobně lze transformace využívat pro integrály funkcí více proměnných. Připomeňme nejdříve, jak je to s transformacemi pro jednu proměnnou: Integrovaný výraz  $f(x)dx$  vyjadřuje plochu obdélníčku určeného (linearizovaným) přírůstkem proměnné  $x$  a hodnotou  $f(x)$ . Pokud proměnnou transformujeme vztahem  $x = u(t)$ , vyjadřuje se i linearizovaný přírůstek jako

$$dx = \frac{du}{dt} dt$$

a proto i příslušný příspěvek pro integrál je vyjádřen jako

$$f(u(t)) \frac{du}{dt} dt,$$

přičemž buď předpokládáme, že znaménko derivace  $u'(t)$  je kladné, nebo dojde k obrácení mezí integrálu, takže ve výsledku se znaménko neprojeví.

Intuitivně je postup v  $n$  proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů.

### Věta

*Nechť  $G(t_1, \dots, t_n) : E_n \rightarrow E_n$ ,  $[x_1, \dots, x_n] = G(t_1, \dots, t_n)$ , je spojitě diferencovatelné zobrazení,  $T$  a  $S = G(T)$  jsou Riemannovsky měřitelné množiny a  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá funkce. Potom platí*

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_T f(G(t_1, \dots, t_n)) |\det(D^1 G(t_1, \dots, t_n))| dt_1 \dots dt_n.$$

Podrobný formální důkaz nebudeme uvádět, je však přímočarou realizací výše uvedené úvahy ve spojení s definicí Riemannova integrálu.

Abychom si přiblížili obsah tvrzení poslední věty, uvedeme jeho speciální případ pro integrál funkce  $f(x, y)$  ve dvou proměnných a transformaci

$$G(s, t) = (g(s, t), h(s, t)).$$

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x, y) dx dy = \int_T f(g(s, t), h(s, t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right| ds dt.$$

Konkrétně: spočtěme integrál z charakteristické funkce kružnice o poloměru  $R$  (tj. její plochu) definovanou v polárních souřadnicích. Nejprve spočítáme Jacobiho matici transformace  $x = r \cos \varphi$ ,  
 $y = r \sin \varphi$

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Proto je determinant z této matice roven

$$\det D^1 G(r, \varphi) = r(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = r.$$

Můžeme tedy přímo počítat pro kružnici  $S$  o poloměru  $R$ , která je obrazem obdélníku  $(r, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi] = T$ :

$$\int_S dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2.$$

## Příklad (využití polárních souřadnic)

Zjednodušte dvojný integrál

$$I = \int_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy$$

na jednoduchý přechodem k polárním souřadnicím.

## Řešení

Z předchozího víme, že při transformaci  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  je determinant Jacobiho matice roven  $r$ . Proto

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 f(r) \cdot r \, dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^1 f(r) \cdot r \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^1 f(r) \cdot r \, dr. \end{aligned}$$

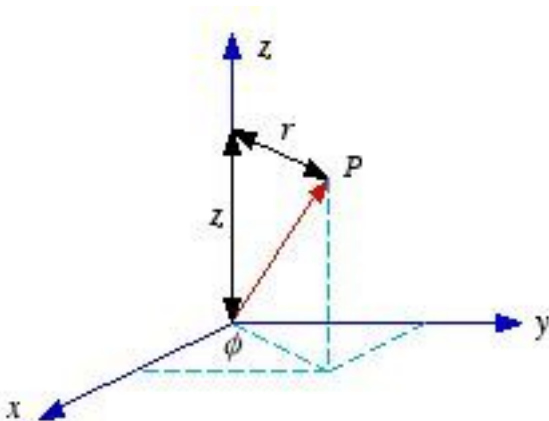


# Časté transformace souřadnic v $E_3$

## Válcové souřadnice Zobrazení

$G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$



**Válcové souřadnice** Zobrazení

$G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \\ \left( r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z \right),\end{aligned}$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

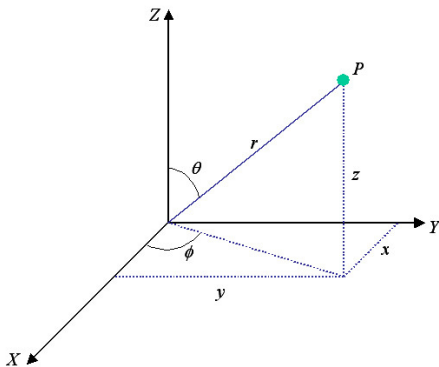
Proto je  $\det D^1 G = r$ .

# Časté transformace souřadnic v $E_3$

## Sférické souřadnice Zobrazení

$G : \{[r, \theta, \varphi]; r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$



**Sférické souřadnice** Zobrazení

$G : \{[r, \theta, \varphi]; r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$\left( r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right),$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Proto je

$$\begin{aligned} \det D^1 G &= r^2 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \\ &+ r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi = \\ &= r^2 \sin^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

## Příklad

Vypočtete objem koule o poloměru  $R$ .

## Řešení

Koule  $B(R)$  o poloměru  $R$  je dána ve sférických souřadnicích  $(r, \theta, \varphi)$  jednoduchou podmínkou  $r \leq R$ . Je tedy obrazem intervalu  $U = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ , přičemž víme, že objemový element (tj. determinant jakobiánu transformačního zobrazení) je roven  $r^2 \sin \theta$ . Proto je objem koule roven

$$\begin{aligned} \int_B 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_U r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\varphi = \frac{4}{3} R^3 \pi. \end{aligned}$$

## Příklad

Vypočtete integrál

$$I = \int_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

kde množina  $V$  je vymezena plochou  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .

## Řešení

Transformací do sférických souřadnic dostáváme (grafem plochy je koule se středem v  $[0, 0, 1/2]$  a poloměrem  $1/2$ ) – promyslete meze!

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} r \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \dots = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

# Určování mezí integrace

Častým obtížným úkolem je při integraci v  $E_3$  určování intergačních mezí. V tom nám může pomoci:

- prostorová představivost
- u symetrických objektů omezení pouze na výpočet v části objektu
- zakreslení řezu objektu vhodnými rovinami (často  $x = 0$ ,  $y = 0$  nebo  $z = 0$ , případně využití SW pro vykreslení prostorového grafu.

# Využití ve fyzice

## Hmotnost tělesa

Těleso o objemu  $V$  a hustotě v bodě  $[x, y, z]$  dané funkcí  $\rho(x, y, z)$  má hmotnost danou vztahem

$$M = \int_V \rho \, dx dy dz.$$

## Těžiště tělesa

Těleso o objemu  $V$  a hustotě v bodě  $[x, y, z]$  dané funkcí  $\rho(x, y, z)$  má souřadnice těžiště  $[x_0, y_0, z_0]$  dané vztahy

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_V x \rho \, dx dy dz, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_V y \rho \, dx dy dz, \quad z_0 = \frac{1}{M} \int_V z \rho \, dx dy dz.$$



# Využití ve fyzice – pokr.

## Moment setrvačnosti

Momentem setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose  $\ell$  je

$$I_{\ell} = \int_V \rho r^2 dx dy dz,$$

kde  $r$  je funkce závislosti bodu  $[x, y, z]$  od osy  $\ell$ .

### Příklad

Určete souřadnice těžiště kruhové destičky  $x^2 + y^2 \leq a$ , je-li její hustota v bodě  $[x, y]$  přímo úměrná vzdálenosti od bodu  $[a, 0]$ .

$$[x_T = -\frac{a}{5}, y_T = 0]$$

### Příklad

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního válce  $x^2 + y^2 \leq a^2$  o hustotě  $\rho_0$  vzhledem k ose tvořené přímkou  $x = y = z$ .

$$\left[ \frac{M}{3} (a^2 + \frac{2}{3}h^2) \right]$$

## Interpolace a aproximace – opakování

*Interpolace* – stanovení formule pro funkci, kterou máme zadánu v bodech  $x_0, \dots, x_n$ . Formule musí v těchto bodech dodržet danou funkční hodnotu (např. interpolační polynom stupně  $n$ ). Mimo interval – *extrapolace*.

*Aproximace* – stanovení formule pro funkci, kterou máme zadánu v bodech  $x_0, \dots, x_n$ . Formule má obvykle méně „stupňů volnosti“ než  $n$ , proto danou funkční hodnotu obvykle nejde dodržet. Snažíme se najít nejlepší možnou aproximaci podle předem daného kritéria (např. metoda nejmenších čtverců).

# Polynomiální interpolace

## Lagrangeův interpolační polynom

$$f(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x),$$

kde

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

**Hermiteův interpolační polynom** – kromě funkčních hodnot známe v daných bodech i hodnotu derivace.

**Interpolace (kubickými) splajny** – interpolace po částech kubickými polynomy, přičemž v uzlových bodech požadujeme rovnost 1. a 2. derivací sousedních polynomů.

**Trigonometrická interpolace** – interpolační polynom

$$Q_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^n (A_j \cos jx + B_j \sin jx),$$

jehož koeficienty obvykle počítáme pomocí *rychlé Fourierovy transformace – FFT*.

# Aproximace metodou nejmenších čtverců

Slouží k rekonstrukci funkce  $f$  z hodnot  $f_0, \dots, f_n$  naměřených v uzlových bodech  $a_0, \dots, a_n$ . Tuto rekonstrukci hledáme vzhledem k danému modelu – dané posloupnosti funkcí (obecně více proměnných)  $g_0(x), \dots, g_m(x), \dots$  – ve tvaru

$$y_m(x) = \sum_{j=0}^m c_j g_j(x).$$

Cílem je při tom minimalizovat „součet čtverců“

$$\sum_{i=0}^n (f_i - y_m(a_i))^2.$$

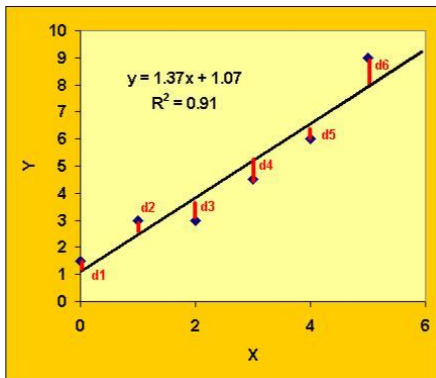
# Aproximace metodou nejmenších čtverců

Aplikace – lineární (multilineární) regrese ve statistice

Typy modelů:

- $g_j(x)$  – obecný polynom stupně  $j$
- $g_j(x)$  – ortogonální polynomy na dané množině bodů
- $g_j(x)$  – trigonometrický polynom

# Aproximace metodou nejmenších čtverců



# Numerické derivování

Uvedeno pouze pro úplnost, metody velmi jednoduché, založené na definici derivace. Často dávají velmi nepřesný výsledek. Uvedeme zde pouze pro případ funkcí jedné proměnné, ve více proměnných počítáme parciální derivace analogicky.

Pro výpočet odhadu  $k$ -té derivace funkce v daném bodě, známe-li hodnoty této funkce v několika bodech, lze využít *interpolaci* této funkce, např. Lagrangeův interpolační polynom.

# Numerické derivování

V praxi se často používají jednoduché několikabodové vzorce pro odhad derivace:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)),$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)),$$

nebo pětibodový vzorec

$$f'(x) \approx \frac{1}{12h}(-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)).$$



## Numerická integrace (kvadratura)

Numerická integrace nachází uplatnění zejména v následujících případech:

- integrovanou funkci neznáme přímo, známe jen její hodnoty v některých bodech (např. z měření)
- integrovaná funkce je známá, ale její primitivní funkci (antiderivaci) je obtížné (či dokonce nemožné) vyjádřit jakožto *elementární funkci*.

# Numerická kvadratura

Přímo z definice Riemannova integrálu – snaha odhadnout plochu pod křivkou, objem „pod plochou“ apod. Podobně jako u derivování i zde můžeme využít interpolační polynomy.

## Newton-Cotesovy vzorce

Interval  $[a, b]$ , nad kterým integrujeme, rozdělíme na  $n$  **stejných** částí (délky  $h$ ) tak, že v krajních bodech těchto částí známe hodnotu integrované funkce. Podle toho, jestli uvažujeme i hodnoty v krajních bodech  $a$  a  $b$  intervalu, rozlišujeme Newton-Cotesovy formule na *uzavřené* a *otevřené*.

Pak

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i),$$

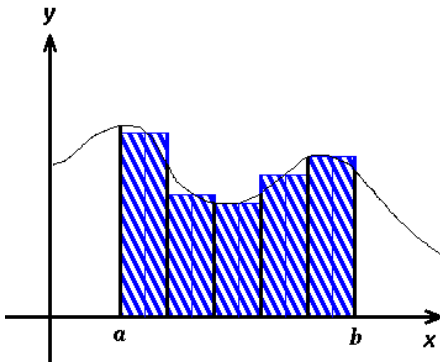
$w_i$  jsou váhy (uzavřený tvar).

Váhy snadno odvodíme např. pomocí Lagrangeovy interpolace.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b L(x) dx = \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x) dx}_{w_i}.\end{aligned}$$

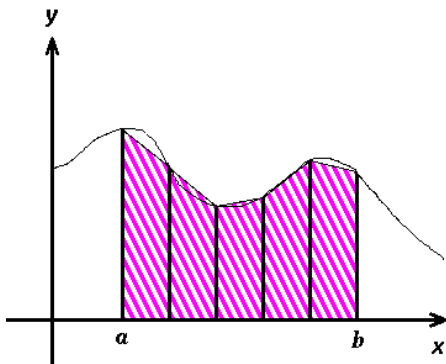
**obdélníkové pravidlo** (otevřená Newton-Cotesova formule) –  
interpolace konstantní funkcí

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$



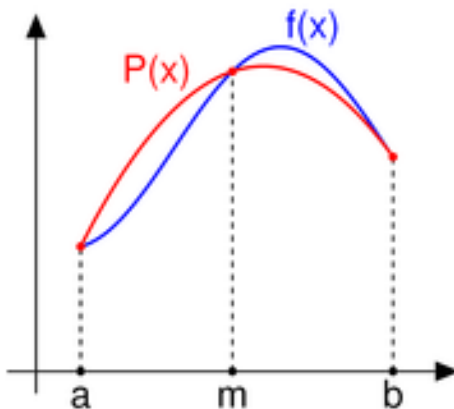
**lichoběžníkové pravidlo** (uzavřená Newton-Cotesova formule) –  
interpolace lineární funkcí

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$



**Simpsonovo pravidlo** (uzavřená Newton-Cotesova formule) –  
interpolace kvadratickou funkcí

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$



## Příklad

Pomocí lichoběžníkového, resp. Simpsonova pravidla vypočtete

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

## Řešení

- lichoběžníkové pravidlo:  $I \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 0.785$
- Simpsonovo pravidlo:  $I \approx \frac{\pi}{12} \left( 0 + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \approx 1.003.$

# Metody Monte Carlo

Obvykle používané u vícerozměrných integrálů, kde je často výrazně přesnější a efektivnější než násobné použití metod na numerickou integraci jednorozměrných integrálů.

**Princip – výpočet objemu tělesa  $V$  uvnitř jednotkové krychle:**

- vygenerujeme náhodný bod uvnitř jednotkové krychle
- zjistíme, zda leží uvnitř tělesa
- opakujeme

Podíl objemu tělesa a krychle je pak aproximován relativní četností jevu, že náhodný bod leží uvnitř tělesa.



# Metody Monte Carlo

Integrál  $\int_a^b f(x) dx$  tak aproximujeme pomocí výběru náhodných  $n$  bodů  $x_i$  z intervalu  $[a, b]$ , ve kterých určíme funkční hodnoty.

Pak

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$