# Demonstrativní cvičení k předmětu MB103

(Petr Hasil, hasil@math.muni.cz)

OBSAH

## 1. Demonstrativní cvičení

**Příklad 1.** Zobrazte v rovině definiční obory funkcí:

(i) $f(x,y) = \frac{x}{y}$,

(ii) $f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{2} + 3y\right)$,

(iii) $f(x,y) = \ln[x\ln(y-x)]$,

(iv) $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y} - \frac{1}{|y|-|x|}$.

**Příklad 2.** Určete definiční obory funkcí:

(i) $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln z$,

(ii) $f(x,y,z) = \arcsin\frac{z}{2} - \ln\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

**Příklad 3.** Načrtněte vrstevnice funkcí:

(i) $f(x, y) = \frac{x+y}{2}$,
(ii) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

**Příklad 4.** Pomocí vrstevnic a řezů souřadnými rovinami načrtněte graf funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

**Příklad 5.** Rozhodněte, zda je daná posloupnost Cauchyovská ($i \in \mathbb{N}$).

(i) $(-1)^i$,
(ii) $a^i, \quad a \geq 0$,
(iii) $\frac{i+1}{i^2}$.

**Příklad 6.** Určete všechny hromadné body dané množiny.

(i) $\mathbb{N}$,

(ii) $\{(-1)^i, i \in \mathbb{N}\}$,

(iii) $\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots\}$,

(iv) Množina je dána prvky matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{3} & \cdots \\ 2 & 2+\frac{1}{2} & 2+\frac{1}{3} & \cdots \\ 3 & 3+\frac{1}{2} & 3+\frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Příklad 7.** Určete tečnu v bodě $t = \frac{\pi}{2}$ křivky dané předpisem

$$f(t) = (2\cos t + \cos 2t, 2\sin t + \sin 2t).$$

**Příklad 8.** Najděte takový bod na křivce $f(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou $x + 2y + z = 4$.

**Příklad 9.** Určete limity:

(i) $\lim_{(x,y)\to(-4,1)} \frac{x+y}{x^2}$,

(ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$,

(iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$,

(iv) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$,

(vi) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

**Příklad 10.** Dokažte, že následující limity neexistují.

(i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$,

(ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

**Příklad 11.** Spočtěte dvojnásobné limity. Existuje limita dvojná?

- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{2x^2}\right)$,
- $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{2x^2}\right)$.

## 2. Demonstrativní cvičení

**Příklad 12.** Vypočítejte $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f'''_{xxy}, f'''_{yxx}, f'''_{xyx}$ funkce $f(x,y) = x^5 + 12x^3y - y^7$.

**Příklad 13.** Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ v bodě $[1,-1]$ dle vektoru $\mathbf{u} = (1,2)$.

**Příklad 14.** Určete parciální derivace prvního řádu následujících funkcí.

(i) $f(x,y) = x^y$,

(ii) $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x^2(1-y-z)}$.

**Příklad 15.** Vypočtěte parciální derivace prvního řádu následujících funkcí v daných bodech.

(i) $f(x,y) = y^2 + y\sqrt{1+x^2}$ v bodě $[2,5]$,

(ii) $f(x,y) = \ln(x + \frac{y}{2x})$ v bodě $[1,2]$.

**Příklad 16.** Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu výrazu

$$\log_2[(1,96)^2 + 4,02],$$

víte-li, že $\ln 2 \doteq 0,693$.

**Příklad 17.** Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu výrazu

$$\big(1,04\big)^{2,02}.$$

**Příklad 18.** Určete rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce.

(i) $f(x,y) = x^3 + y^4 - 2xy$ v bodě $[1,2,?]$,

(ii) $f(x_1,x_2,x_3) = \operatorname{arctg}\frac{x_1x_2}{x_3}$ v bodě $[\sqrt{2},2,4,?]$.

**Příklad 19.** Určete Hessovu matici funkce $f(x, y) = x^y$ v bodě $[\mathrm{e}, 2]$.

**Příklad 20.** Pomocí Taylorova polynomu druhého řádu v bodě $[1,1]$ odhadněte hodnotu funkce

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

v bodě $[1,1;1,2]$.

## 3. Demonstrativní cvičení

**Příklad 21.** Spočtěte Jacobián zobrazení $F = \{r\cos\varphi, r\sin\varphi\}$.

**Příklad 22.** Rozhodněte, zda je zobrazení $F = \{f, g\}$, kde $f(x, y) = xy, g(x, y) = x/y$ prosté v okolí bodu $[2, 1]$. Pokud ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $[u, v] = F(2, 1)$.

**Příklad 23.** Najděte lokální extrémy funkce
$$f(x, y) = xy(4 - x - y).$$

**Příklad 24.** Najděte globální extrémy funkce

$$f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

**Příklad 25.** Určete rovnici tečné roviny v bodě $[1, 1, \frac{5}{6}]$ grafu funkce dané implicitně

$$\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - 3z = 0.$$

**Příklad 26.** Rozhodněte, zda graf funkce dané implicitně

$$\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$$

leží v okolí bodu $[1, 3]$ nad nebo pod tečnou.

**Příklad 27.** Rozhodněte, zda graf funkce dané implicitně

$$x + y^2 + z^3 + z - 4 = 0$$

leží v okolí bodu $[1, 1, 1]$ nad nebo pod tečnou rovinou.

**Příklad 28.** Najděte lokální extrémy funkce zadané implicitně

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16.$$

## 4. Demonstrativní cvičení

**Příklad 29.** Na elipse o rovnici

$$x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$$

najděte body, v nichž je normála rovnoběžná s osou $y$.

**Příklad 30.** Určete rovnici tečné roviny a normály k ploše

$$\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0$$

v bodě $[2, \frac{4}{3}, -1]$.

**Příklad 31.** Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25}$$

na množině $M$ dané rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

**Příklad 32.** Výrobce uvažuje možnost produkce dvou výrobků $V_1$ a $V_2$. Pro jejich výrobu může počítat s využitím $180$ kg surovin, $240$ hodin práce speciálních strojů a náklady jsou přitom omezeny částkou $160$ tisíc. Na základě předpokládaných tržeb byl stanoven očekávaný zisk za $1$ kus výrobku $V_1$ $7$ tisíc Kč a u výrobku $V_2$ $9$ tisíc Kč. Z předběžného průzkumu zájmu o oba výrobky vyplynulo, že je lze prodat v libovolném množství.

V rámci přípravy produkce byla stanovena náročnost obou výrobků z hlediska spotřeby uvažovaných výrobních zdrojů na $1$ kus:

| Výrobek | spotřeba surovin [kg] | spotřeba času [h] | náklady [tis. Kč] |
|---|---|---|---|
| $V_1$ | $3$ | $5$ | $10$ |
| $V_2$ | $5$ | $4$ | $2$ |

Vzhledem k uvedeným skutečnostem se výrobce zajímá o to, jak by měla vypadat struktura výroby, aby mu přinesla co největší zisk.

## 5. DEMONSTRATIVNÍ CVIČENÍ

**Příklad 33.** Pomocí Lagrangeových multiplikátorů najděte stacionární body funkce

$$f(x, y, z) = xyz$$

na množině $M$ dané rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

**Příklad 34.** Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z \,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

**Příklad 35.** Převeďte dvojný integrál

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}A$$

na dvojnásobný. (Obě možnosti pořadí integrace.) Množina $A$ je ohraničena:

$$y = x, y = x - 3, y = 2, y = 4.$$

**Příklad 36.** Zaměňte pořadí integrace.

$$\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

**Příklad 37.** Vypočtěte integrál

$$\iint_A (x+y)\,\mathrm{d}A,$$

kde $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq x\}$.

**Příklad 38.** Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

**Příklad 39.** Určete obsah množiny $A$ ohraničené:

$$x = y^2, x = 4y^2 - 3.$$

## 6. Demonstrativní cvičení

**Příklad 40.** Vypočtěte objem množiny $A$ ohraničené všemi souřadnými osami a:

$$z = x^2 + y^2, x + y = 1.$$

**Příklad 41.** Vypočtěte integrál

$$\iint_A 2(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$.

**Příklad 42.** Převeďte integrál na dvojnásobný.

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}A,$$

kde $A$ je ohraničená:

$$x^2+y^2=4x, x^2+y^2=8x, y=x, y=2x.$$

**Příklad 43.** Spočtěte integrál

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

**Příklad 44.** Spočtěte integrál

$$\iiint_A 3z^2 \, \mathrm{d}A,$$

kde množina $A$ je dána:

$$x^2 + y^2 \leq z, z \leq 2 - (x^2 + y^2).$$

**Příklad 45.** Spočtěte integrál

$$\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde množina $A$ je dána:

$$0 \le x \le y, z \ge 0, x^2+y^2+z^2 \le 1.$$

**Příklad 46.** Vypočtěte objem množiny $A$ dané nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z \geq \sqrt{x^2 + y^2},$$

(a) pomocí válcových souřadnic,
(b) pomocí sférických souřadnic.

**Příklad 47.** Vypočtěte objem množiny $A$, která je průnikem koulí daných

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 + z^2 = 8z,$$

(a) pomocí válcových souřadnic,
(b) pomocí sférických souřadnic.

**Příklad 48.** Najděte souřadnice těžiště tělesa daného nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - (x^2 - y^2),$$

jehož hustota v daném bodě je trojnásobkem kvadrátu (kolmé) vzdálenosti tohoto bodu od roviny $xy$.

**Příklad 49.** Vypočtěte momenty setrvačnosti vzhledem k osám $x, y$ rovinného obrazce daného nerovnostmi

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 2x \leq y \leq 3x,$$

jehož hustota v bodě $[x, y]$ je $\rho(x, y) = x + y$.

**Příklad 50.** Pro rovinný obrazec z předchozího příkladu určete odstředivý moment setrvačnosti.

**Příklad 51.** Pro rovinný obrazec z předchozího příkladu určete geometrické momenty setrvačnosti (vzhledem k osám $x, y$).

**Příklad 52.** Je dán integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Odhadněte jeho hodnotu pomocí složeného

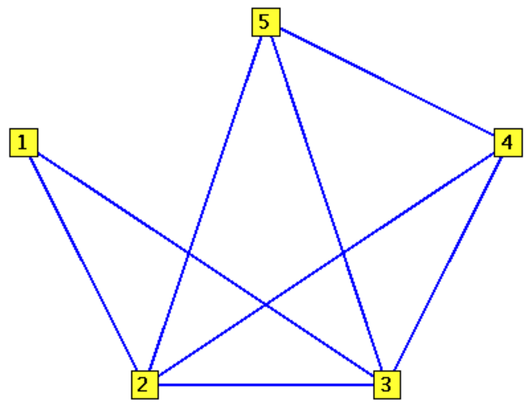
(a) obdélníkového pravidla,
(b) lichoběžníkového pravidla,
(c) Simpsonova pravidla.

Interval rozdělte na tři subintervaly shodné délky. Porovnejte výsledky s přesnou hodnotou a (z obrázku) vysvětlete, proč je to které pravidlo lepší, jiné horší.

## 8. Demonstrativní cvičení

**Příklad 53.** Najděte všechny grafy se třemi vrcholy a vyberte z nich maximum neizomorfních.

**Příklad 54.** Pomocí matice sousednosti určete počet sledů délky $4$ z uzlu $1$ do uzlu $2$ v grafu $G$ na obrázku.



**Příklad 55.** Ověřte, že zadané skóre je skóre nějakého grafu. Jestli ano, graf nakreslete.

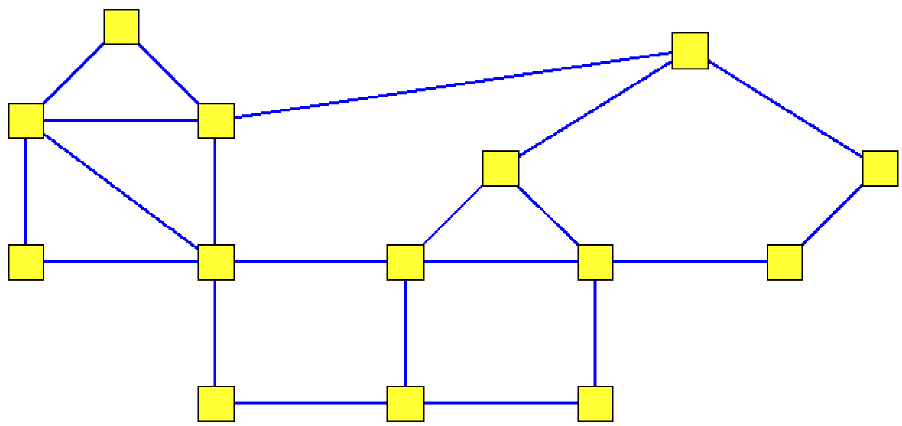
(a) $(5, 2, 2, 3, 1, 3, 5, 5, 5, 2)$,

(b) $(2, 3, 3, 3, 4, 5)$,

(DÚ) $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5)$.

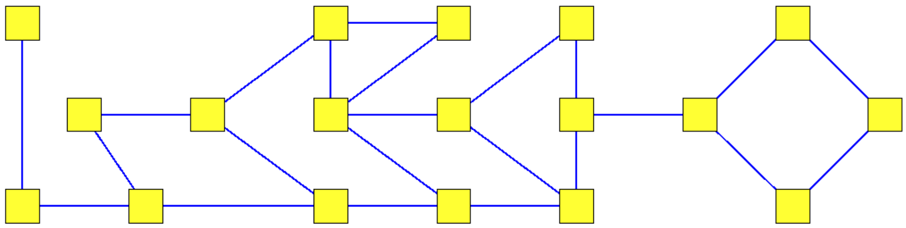
**Příklad 56.** Nakreslete aspoň dva neizomorfní grafy se skóre $(2, 3, 3, 3, 3, 3, 5)$.

**Příklad 57.** Najděte kostru grafu $G$ na obrázku.



## 9. Demonstrativní cvičení

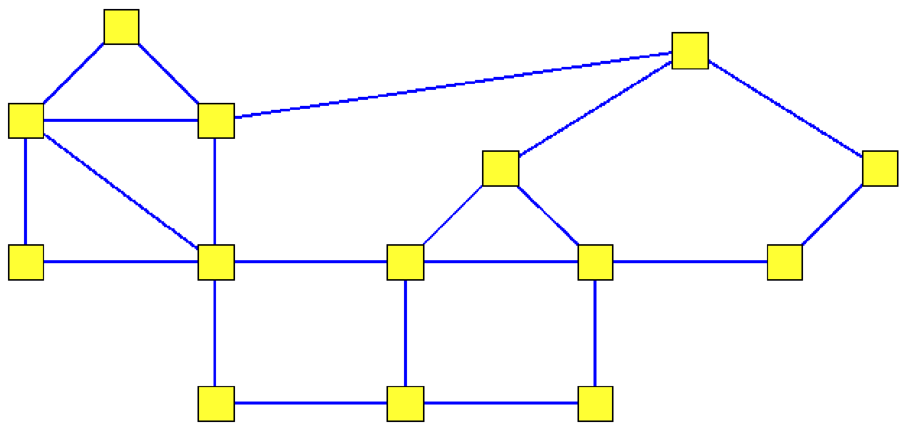
**Příklad 58.** V zobrazeném grafu najděte všechny mosty a artikulace.

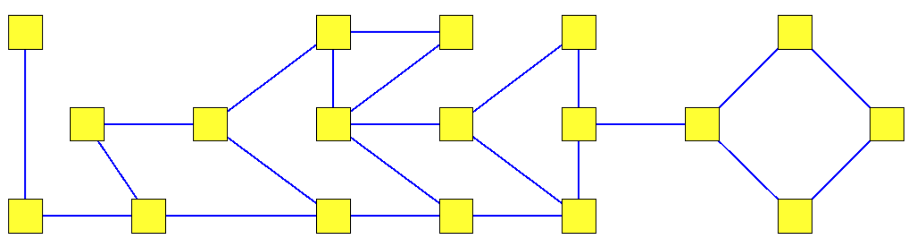


**Příklad 59.** Najděte graf obsahující

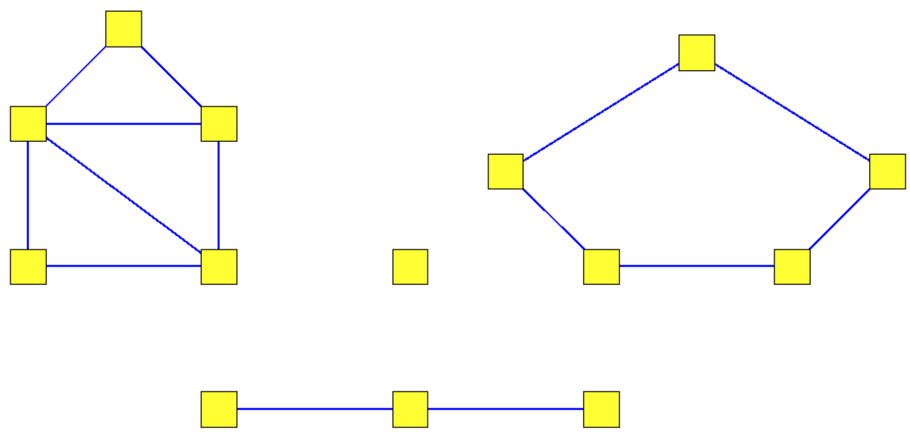
(a) $3$ artikulace a $0$ mostů,
(b) $7$ artikulací a $5$ mostů,
(c) $2$ artikulace a $11$ mostů.

**Příklad 60.** Jsou zobrazené grafy 2-souvislé?

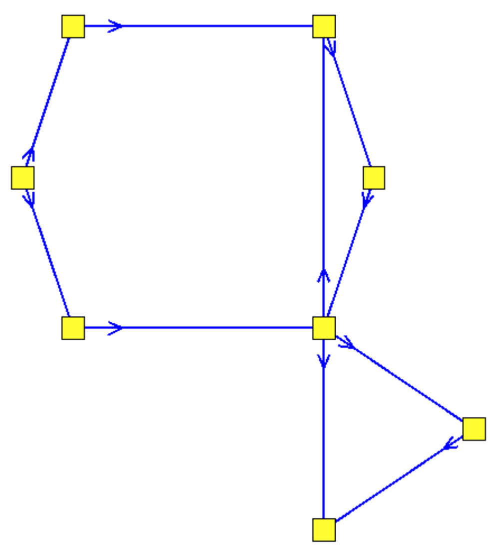




**Příklad 61.** V následujících dvou grafech najděte souvislé komponenty.

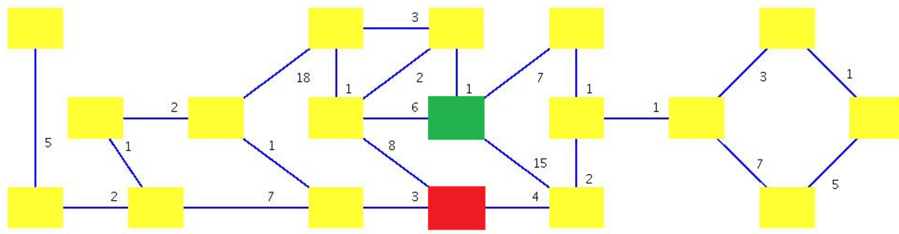


OBRÁZEK 1. První graf



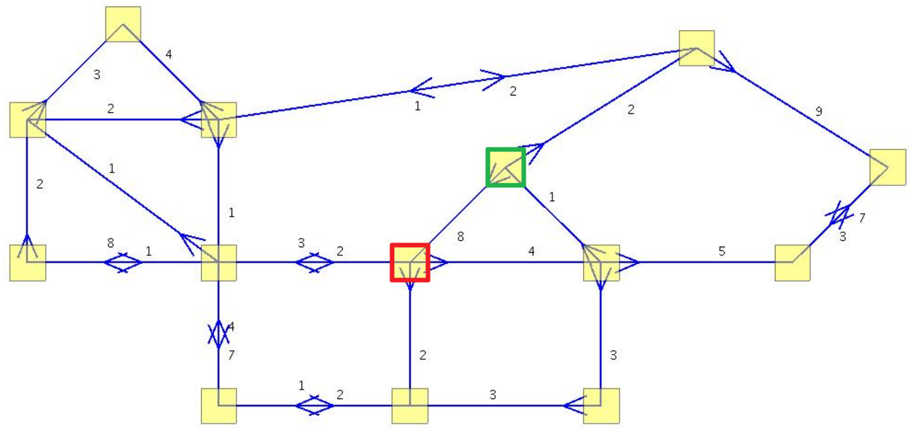
OBRÁZEK 2. Druhý graf

**Příklad 62.** Pomocí Dijkstrova algoritmu najděte nejkratší cestu ze zeleně označeného vrcholu do vrchlu označeného červeně.



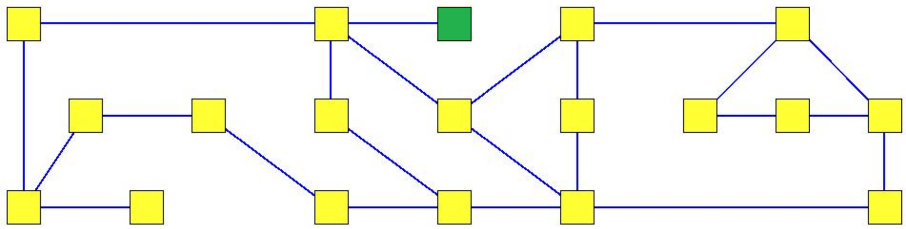
**Příklad 63.** V grafu z předchozího příkladu najděte pomocí Dijkstrova algoritmu nejkratší cesty ze zeleně označeného vrcholu do všech ostatních vrcholů.

**Příklad 64.** Pomocí Dijkstrova algoritmu najděte nejkratší cestu ze zeleně označeného vrcholu do vrchlu označeného červeně.

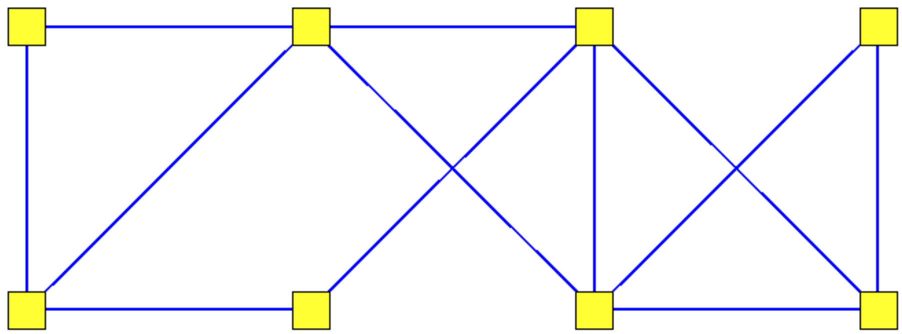


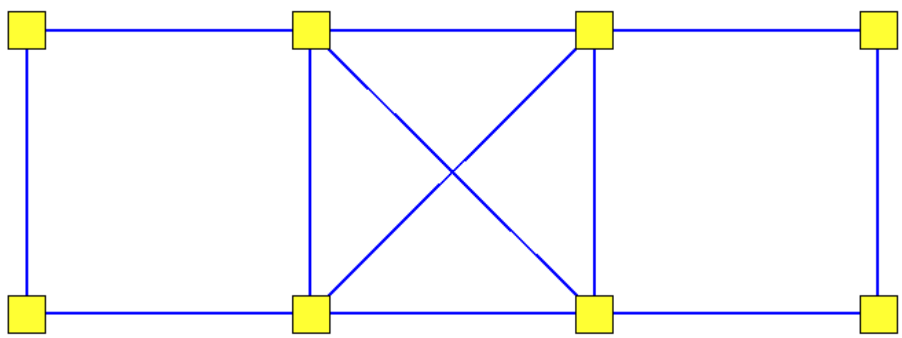
**Příklad 65.** V grafu z předchozího příkladu najděte pomocí Dijkstrova algoritmu nejkratší cesty ze zeleně označeného vrcholu do všech ostatních vrcholů.

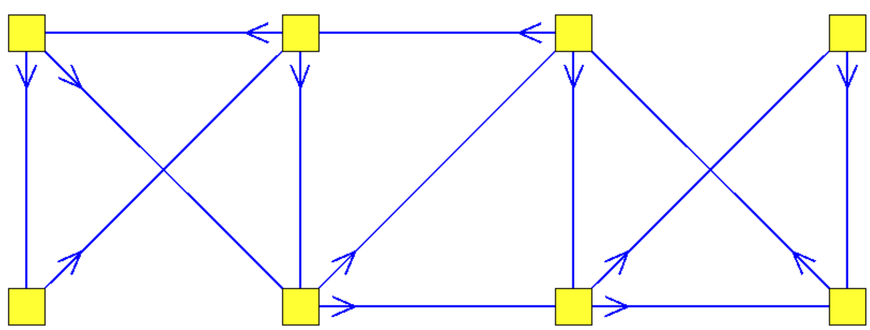
**Příklad 66.** Pomocí Moorova algoritmu najděte nejkratší cestu ze zeleně označeného vrcholu do do všech ostatních vrcholů.



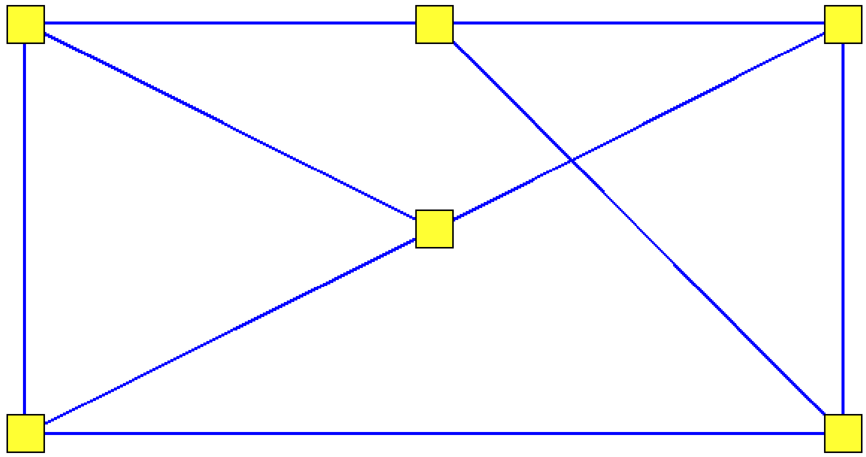
**Příklad 67.** Rozhodněte, zda jsou následující grafy eulerovské. Pokud ne, a je to možné, doplňte je přidáním hran na eulerovské. (Najděte eulerovský tah.)







**Příklad 68.** Rozhodněte, zda je následující graf hamiltonovský. (Najděte hamiltonovskou kružnici.)



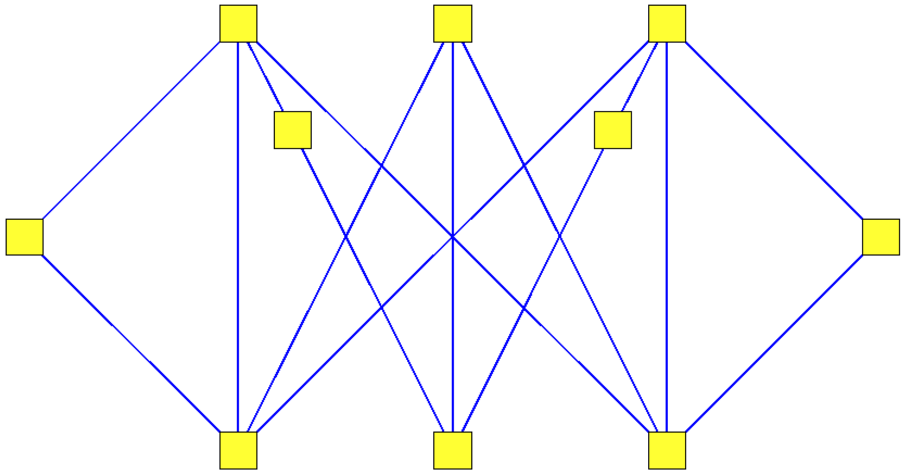
**Příklad 69.** Nakreslete diagramy všech navzájem neizomorfních stromů

(a) se $4$ uzly,
(b) s $5$ uzly,
(c) se $7$ uzly.

Kolik jich je? (Se shodným diagramem a celkem.)

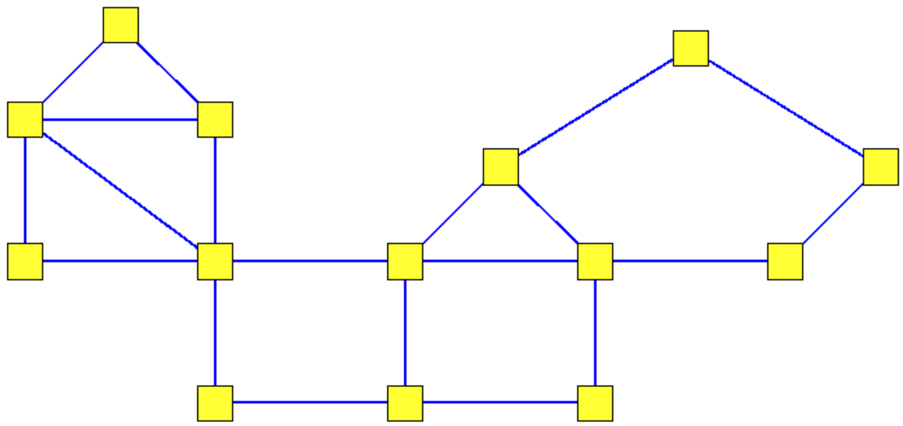
## 10. Demonstrativní cvičení

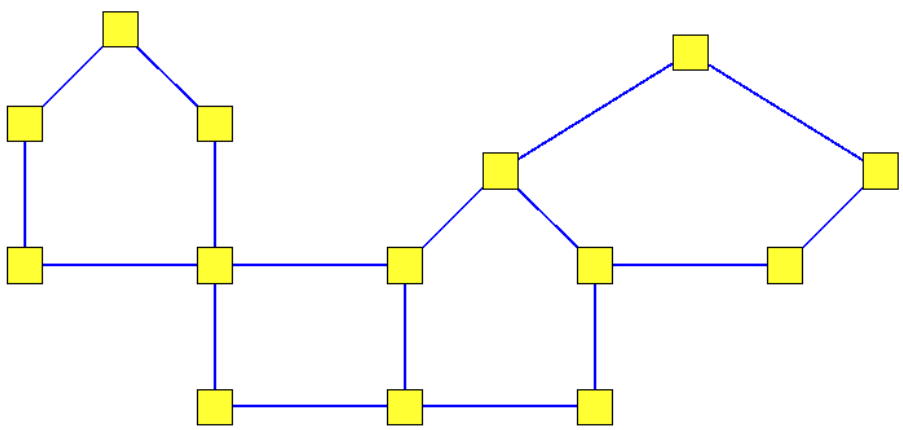
**Příklad 70.** Rozhodněte, zda je/není daný graf rovinný.



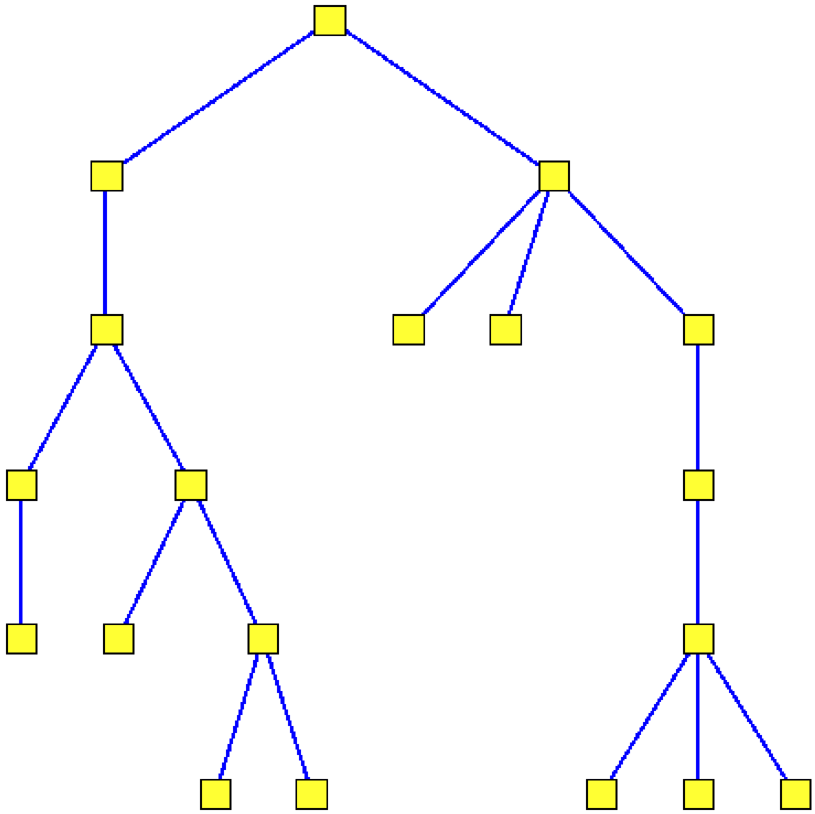
**Příklad 71.** Rozhodněte, zda existuje graf se skóre $(6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)$. Pokud ano, rozhodněte, zda některý graf s daným skóre může být rovinný.

**Příklad 72.** Je daný rovinný graf maximální? Pokud není, kolik hran lze doplnit při zachování rovinnosti? Graf nakreslete.





**Příklad 73.** Určete kód pěstěného stromu na obrázku.



**Příklad 74.** Dle kódu

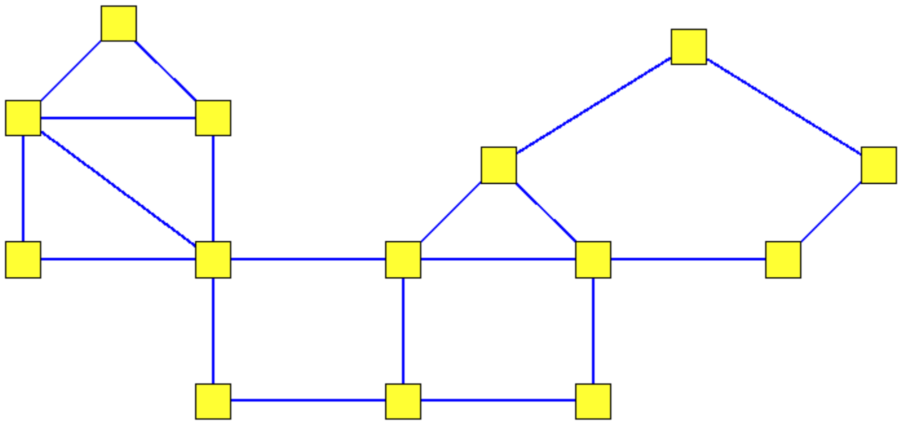
$$0000011001001011111001010000101011111 1$$

nakreslete pěstěný strom.

**Příklad 75.** Najděte kostru grafu

(a) pomocí hran,

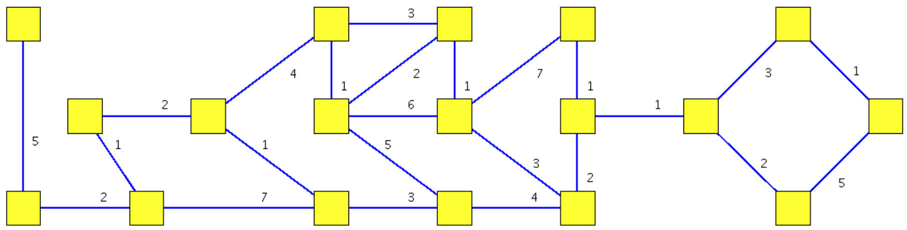
(b) pomocí vrcholů.



**Příklad 76.** Najděte minimální a maximální kostru grafu

(a) pomocí Kruskalova algoritmu,

(b) pomocí Jarníkova (Primova) algoritmu.



**Příklad 77.** Určete, kolik existuje homomorfismů grafů

(a) $P_2$ do $K_4$,
(b) $P_3$ do $K_7$,
(c) $K_4$ do $K_7$.

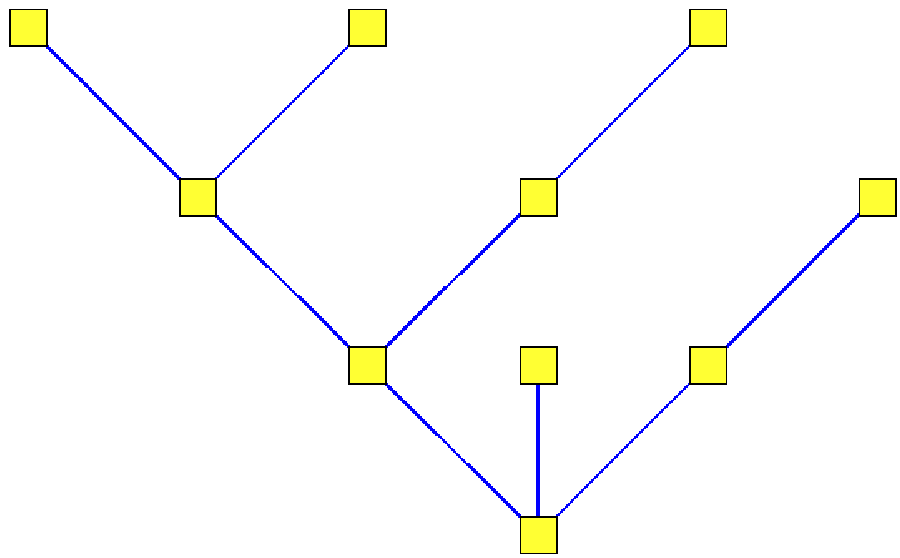
**Příklad 78.** Následující tvrzení dokažte, nebo vyvraťte vhodným protipříkladem.

(a) Každý graf s méně než devíti hranami je rovinný.
(b) Graf, který není rovinný, není ani Hamiltonovský.
(c) Graf, který není rovinný, je Hamiltonovský.
(d) Graf, který není rovinný, není ani Eulerovský.
(e) Graf, který není rovinný, je Eulerovský.
(f) Každý Hamiltonovský graf je rovinný.
(g) Každý Eulerovský graf je rovinný.

**Příklad 79.** Označme vrcholy v grafu $K_5$ postupně čísly $1, \ldots, 5$ a každou hranu ohodnoťte číslem $1$, pokud je součet čísel na jejích vrcholech lichý a $2$, pokud je sudý. Najděte aspoň sedm různých minimálních koster v tomto grafu.

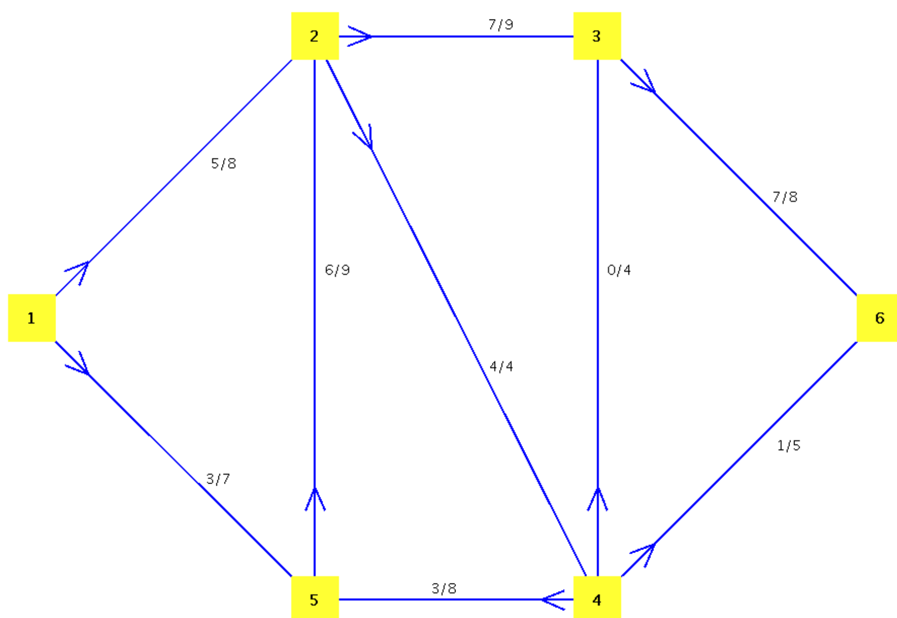
## 11. DEMONSTRATIVNÍ CVIČENÍ

**Příklad 80.** Určete kód pěstěného stromu na obrázku a proveďte kontrolu jeho dekódováním metodou šipek.

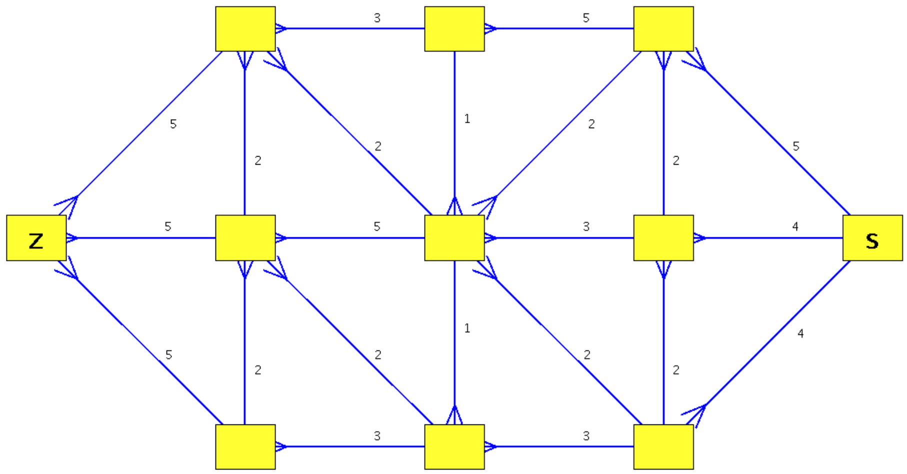


**Příklad 81.** Na obrázku je dán graf $G = (V, E)$, kde hodnota na hraně $e$ je ohodnocení $f(e)/w(e)$. Zvolme vrchol 1 jako zdroj a vrchol 6 jako stok. Tím je dána síť $S = (V, E, z, s, w)$. Vyřešte:

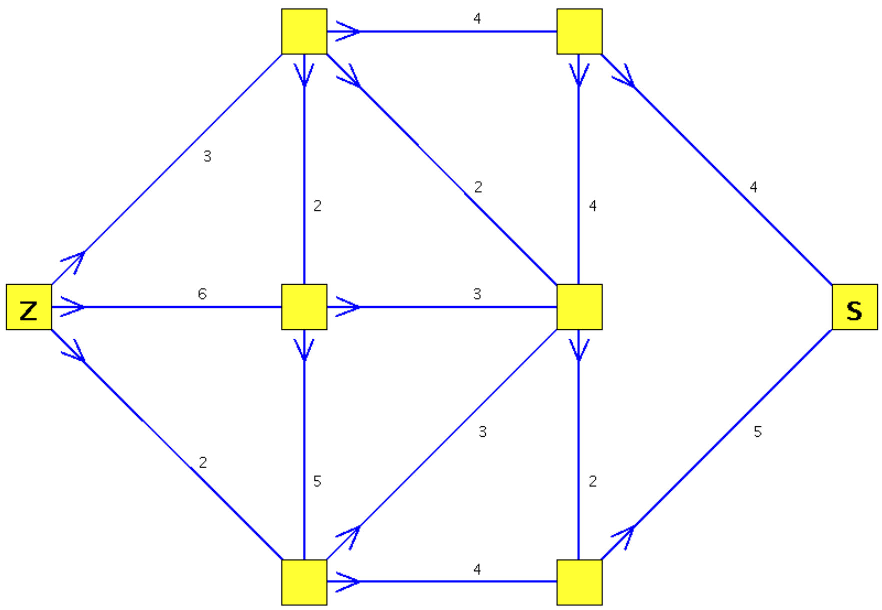
a) Dokažte, že ohodnocení $f : E \to \mathbb{R}$ je tok.
b) Jaká je současná hodnota daného toku?
c) V jakém vztahu je hodnota tohoto toku k vtoku (inflow) ze zdroje a výtoku (outflow) do stoku?
d) Je dán řez $C$, dělící vrcholy do dvou množin $Z = \{1, 2, 3\}$, $S = \{4, 5, 6\}$. Které hrany patří do řezu $C$?
e) Jaká je kapacita (velikost) řezu $C$, a v jakém je vztahu k hodnotě toku?
f) Jak pomocí řezu $C$ zjistíme velikost toku?
g) Je dán jiný řez $C_1$, dělící vrcholy do množin $Z_1 = \{1, 4, 5\}$, $S_1 = V \setminus Z_1$. Které hrany patří do řezu $C_1$?
h) Jaká je kapacita (velikost) řezu $C_1$?
i) Určete velikost toku pomocí řezu $C_1$.
j) Upravte daný tok na maximální a najděte minimální řez v dané síti.



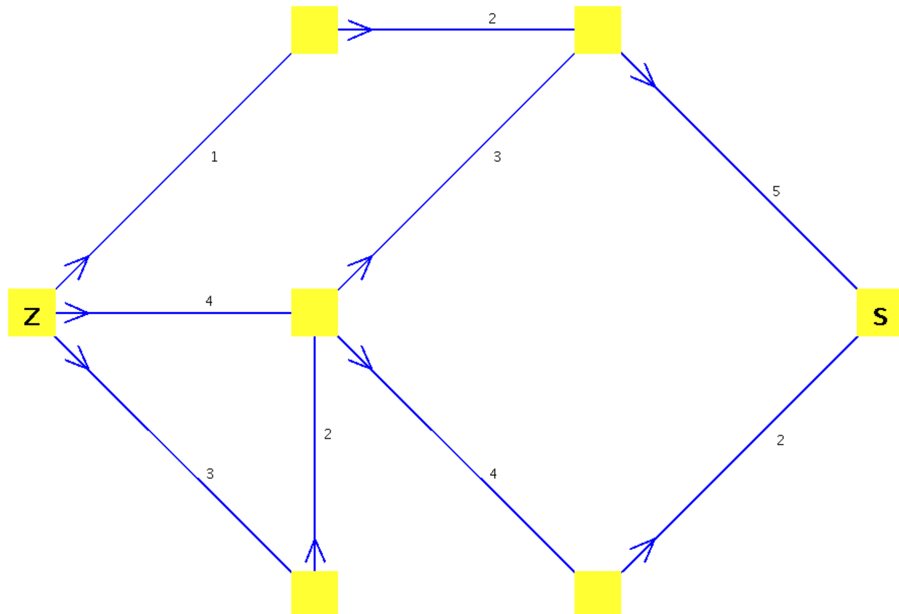
**Příklad 82.** Užitím Ford-Fulkersonova algoritmu najděte maximální tok a minimální řez v síti dané na obrázku.



**Příklad 83.** Užitím Ford-Fulkersonova algoritmu najděte maximální tok a minimální řez v síti dané na obrázku.



**Příklad 84.** V síti na obrázku najděte aspoň deset různých řezů a určete jejich kapacity (velikosti).



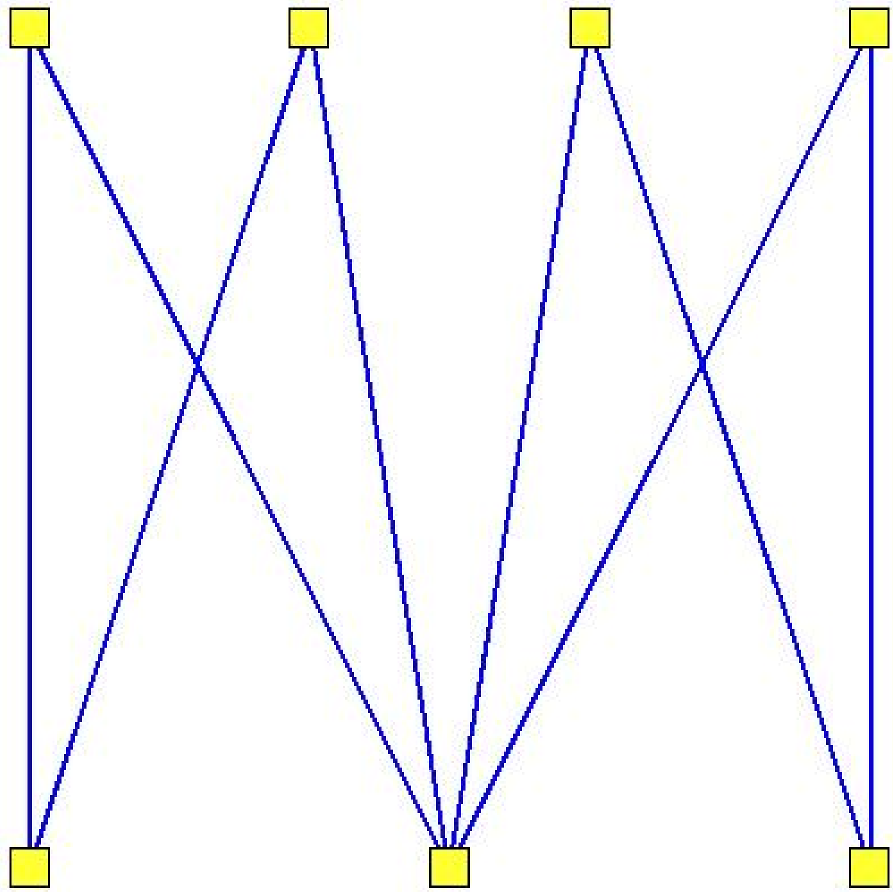
**Příklad 85.** V síti z předchozího příkladu najděte maximální tok a minimální řez.

**Příklad 86.** Uvažujme následující postup pro určování minimální cesty mezi dvěma vrcholy v ohodnoceném neorientovaném grafu:

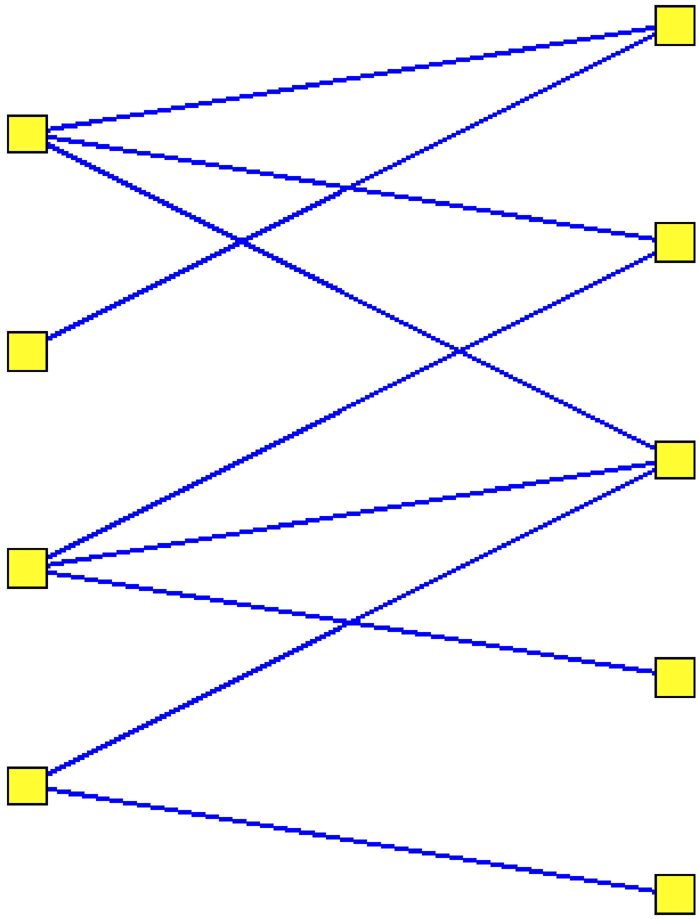
- Najdeme minimální kostru grafu.
- Za minimální cestu prohlásíme jedinou cestu spojující dané dva vrcholy v minimální kostře.

Je tento postup správný? Dokažte, nebo uveďte protipříklad.

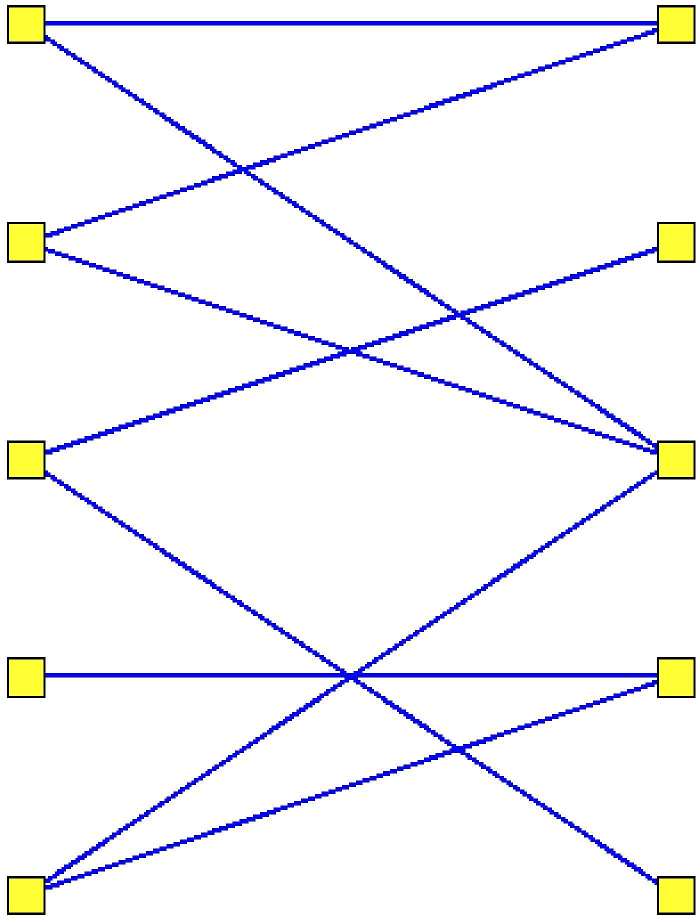
**Příklad 87.** V bipartitním grafu na obrázku najděte takovou maximální podmnožinu hran, že žádné dvě z nich nesdílý stejný vrchol.



**Příklad 88.** V bipartitním grafu na obrázku najděte takovou maximální podmnožinu hran, že žádné dvě z nich nesdílý stejný vrchol.



**Příklad 89.** V bipartitním grafu na obrázku najděte takovou maximální podmnožinu hran, že žádné dvě z nich nesdílý stejný vrchol.



**Příklad 90.** Určete hodnotu maximálního toku a najděte minimální řez v síti s osmi vrcholy dané maticí $A$, kde vrchol $1$ je zdroj a vrchol $8$ stok.

$$A = \begin{pmatrix} - & 16 & 24 & 12 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 30 & - & - & - \\ - & - & - & - & 9 & 6 & 12 & - \\ - & - & - & - & - & - & 21 & - \\ - & - & - & - & - & 9 & - & 15 \\ - & - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - & 18 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

**Příklad 91.** Určete hodnotu maximálního toku a najděte minimální řez v síti se šesti vrcholy dané maticí $B$, kde vrchol $1$ je zdroj a vrchol $6$ stok.

$$B = \begin{pmatrix} - & 24 & - & 27 & - & - \\ - & - & 15 & 6 & - & 6 \\ - & - & - & - & - & 8 \\ - & - & 12 & - & 12 & - \\ - & - & - & - & - & 15 \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

## 12. Demonstrativní cvičení

**Příklad 92.** V cukrárně naproti ústavu matematiky prodávají, mimo jiné, i mé tři nejoblíbenější zákusky - siesta trubičky, marokánky a ovocné košíčky. Spočtěte, kolik dní po sobě si tam mohu jít koupit svačinu tak, aby byla každý den jiná a skládala se z $12$ kusů zákusků výše zmíněných druhů, přičemž od každého druhu chci mít vždy aspoň $2$ kusy, ale košíčků nesním najednou více než $3$. *(Vyjádřete hledaný počet dní jako koeficient vhodné mocniny $x$ ve vhodném součinu mnohočlenů.)*

**Příklad 93.** *Vyřešte použitím polynomů:*
V urně máme $25$ bílých, $40$ červených, $50$ modrých a $75$ černých koulí. (Koule téže barvy jsou nerozpoznatelné.) Kolika způsoby lze z urny vybrat

a) $1$ kouli,
b) $90$ koulí,
c) oranžové letadlo.

**Příklad 94.** Určete (obyčejnou) vytvořující funkci posloupnosti

$$(9, 0, 0, 2 \cdot 16, 0, 0, 4 \cdot 25, 0, 0, 8 \cdot 36, 0, 0, 16 \cdot 49, \ldots).$$

**Příklad 95.** Pomocí výsledku předchozího příkladu určete (obyčejnou) vytvořující funkci posloupnosti

$$(9, 1, -9, 32, 1, -32, 100, 1, -100, \ldots).$$

**Příklad 96.** Pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$ určete (obyčejnou) vytvořující funkci posloupnosti

$$\left\{h(n)\frac{2^n}{(n+1)!}\right\}_{n=0}^{\infty},$$

kde pro $n \in \mathbb{N}$

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \bmod 4, \text{ nebo } n \equiv 3 \bmod 4, \\ -1 & n \equiv 1 \bmod 4, \text{ nebo } n \equiv 2 \bmod 4. \end{cases}$$

13. DEMONSTRATIVNÍ CVIČENÍ

# OPAKOVÁNÍ

**Příklad 97.** Najěte extrémy fumnkce $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$ na množině $x^2 + y^2 = 9$.

**Příklad 98.** Určete tři "kandidáty" na globální extrémy funkce
$$f(x) = \sin x^{xy^2} + \sqrt[6]{x^2 + 3}$$
na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq 9, y \geq 3, y \leq x - 5\}$.

**Příklad 99.** Určete obsah množiny $A$ dané nerovnostmi

$$x \geq 1, \quad \frac{1}{x^3} \leq y \leq \frac{1}{x^2}.$$

**Příklad 100.** Spočtěte integrál

$$\iint\limits_A |xy - y| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina $A$ je ohraničena $x = 0, y = 2 - x, y = -1$.

**Příklad 101.** Transformujte integrál

$$\iint\limits_A f(x,y)\ \mathrm{d}A$$

do polárních souřadnic. Množina $A$ je dána nerovnostmi

$$x^2+y^2\le 15+2x,\quad x^2+y^2\le 10x+8y-25,\quad y\ge\frac{\sqrt{3}}{3}x,\quad y\le x.$$

**Příklad 102.** Spočtěte integrál

$$\iint_A x^2y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina $A$ je ohraničena

$$xy = \frac{1}{2}, \quad xy = 2, \quad 2y = x, \quad y = 2x, \quad x, y \geq 0.$$

**Příklad 103.** Užitím transformace $u = xy, y = vx$ spočtěte integrál z předchozího příkladu.

## 14. DEMONSTRATIVNÍ CVIČENÍ

**Příklad 104.** Určete objem množiny ohraničené všemi souřadnými rovinami a rovinami $x + y = 1, x + 4y + 2z = 6$.

**Příklad 105.** Určete objem množiny ohraničené

$$x = 0, \quad x + y = 2, \quad x - y = 2, \quad z = \ln(x + 2), \quad z = \ln(6 - x).$$

**Příklad 106.** Pomocí trojného integrálu (bez užití transformace) vypočtěte objem tělesa daného

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y + z \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}.$$

**Příklad 107.** Určete objem tělesa z předchozího příkladu transformací trojného integrálu do válcových souřadnic.

**Příklad 108.** Spočtěte (bez užití transformace) integrál

$$\iiint\limits_M x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 1 - x\}.$$

**Příklad 109.** Spočtěte integrál z předchozího příkladu pomocí transformace do válcových souřadnic.

## ŘEŠENÍ

**Řešení příkladu 1.** Definiční obor je množina bodů, ve kterých je funkce definována.

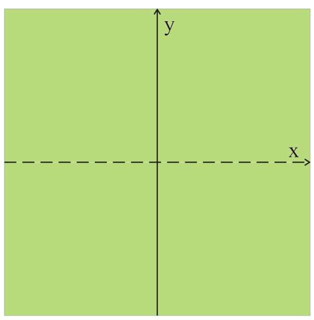
(i) Obr. 3. Definičním oborem je celá rovina bez osy $x$.

(ii) Obr. 4. Definičním oborem je polorovina s hraniční přímkou $\frac{x}{2} + 3y = 0$ obsahující bod $[1, 1]$ bez této přímky.

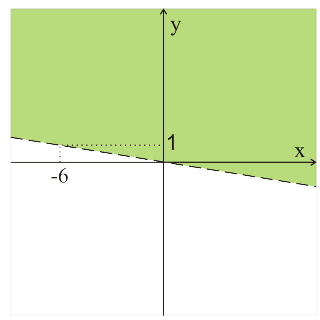
(iii) Obr. 5. $\mathrm{Dom}(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y - x > 1) \vee (x < 0 \wedge 0 < y - x < 1)\}$.

(iv) Obr. 6.

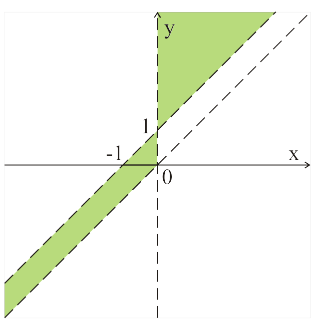
$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f) &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm x, (x \geq -y \wedge x \leq y) \vee (x \leq -y \wedge x \geq y)\} \\ &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x > -y \wedge x < y) \vee (x < -y \wedge x > y)\}\end{aligned}$$



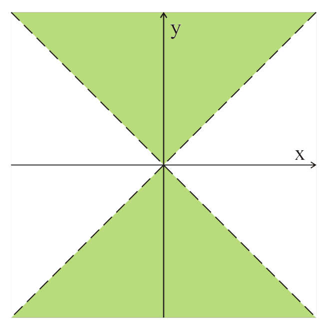

OBRÁZEK 3.




OBRÁZEK 4.




OBRÁZEK 5.




OBRÁZEK 6.

**Řešení příkladu 2.** Definičním oborem funkcí tří proměnných je podmnožina $\mathbb{R}^3$.

(i) $\mathrm{Dom}(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0, z > 0, (y > 0 \wedge x \geq 0) \vee (y < 0 \wedge x \leq 0)\}$.

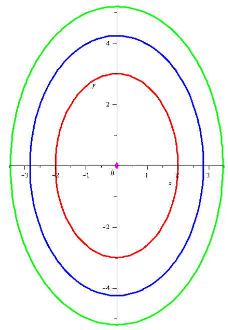
(ii) $\mathrm{Dom}(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y \neq \pm z, z \in [-2, 2]\}$.

**Řešení příkladu 3.** Vrstevnice spojují body se stejnou funkční hodnotou. Dostaneme je tak, že položíme $f(x, y) = c$, kde $c$ je konstanta nabývající hodnoty z oboru hodnot dané funkce (jinde nemá význam vrstevnice dělat). Pro různá $c$ dostáváme různé vrstevnice.

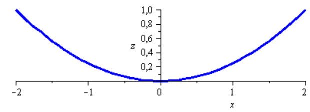
(i) Vrstevnice jsou rovnoběžné s osou II. a IV. kvadrantu – $x + y = 2c$.

(ii) Vrstevnice jsou soustředné kružnice se středem v počátku – $x^2 + y^2 = c$. (Poloměr $= \sqrt{c}$. Pro $c = 0$ jde o počátek.)

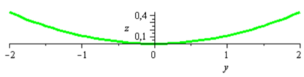
**Řešení příkladu 4.** Vrstevnice tvoří soustředné elipsy – viz obr. 7.
Řez rovinou $xy$ (dosazujeme $z = 0$) je jediný bod – počátek.
Řez rovinou $xz$ (dosazujeme $y = 0$) je parabola $z = x^2/4$ – viz obr. 8.
Řez rovinou $yz$ (dosazujeme $x = 0$) je parabola $z = y^2/9$ – viz obr. 9.
Jde tedy o eliptický paraboloid – viz obr. 10.



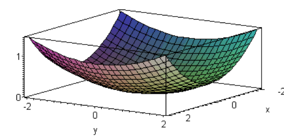
OBRÁZEK 7.



OBRÁZEK 8.



OBRÁZEK 9.



OBRÁZEK 10.

**Řešení příkladu 5.** Řekneme, že posloupnost je Cauchyovská, jestliže pro libovolnou zvolenou vzdálenost $\varepsilon$ najdeme bod posloupnosti, od kterého dál jsou její prvky od sebe vzájemně vzdáleny o méně než $\varepsilon$.

(i) Není. Jakkoli daleko lze vybrat dvojici bodů vzdálených o 2.
(ii) Je pro $a \leq 1$, jinak není.
(iii) Je.

**Řešení příkladu 6.** Hromadný bod množiny $A$ je takový bod, jehož libovolné okolí obsahuje nekonečně mnoho dalších prvků množiny $A$. (Existuje k němu konvergující posloupnost bodů – různých od něj – množiny $A$.)
Hromadný bod posloupnosti je takový bod, ke kterému existuje konvergentní podposloupnost. (Opět je v jeho libovolném okolí nekonečně mnoho prvků dané posloupnosti.)

(i) Nemá žádný hromadný bod ani jako množina, ani jako posloupnost.
(ii) Protože v množině je každý prvek počítán jen jednou, jde o množinu $\{-1, 1\}$, která nemá žádný hromadný bod. Jako posloupnost má hromadné body $-1, 1$.
(iii) Množinově jde o $\mathbb{N}$, tedy tato množina nemá žádný hromadný bod. Uvažujeme–li o posloupnosti, potom jsou jejími hromadnými body všechna přirozená čísla.
(iv) Jako množina i posloupnost (brána např. po vedlejších diagonálách zleva doprava) jsou jejími hromadnými body všechna přirozená čísla a (plus)nekonečno.

**Řešení příkladu 7.** Dosazením do předpisu $f(t)$ dostaneme bod $[-1, 2]$ a derivací jednotivých složek v $t = \pi/2$ směrový vektor $(-2, -2)$. Hledaná tečna je tedy (parametricky):

$$x = -1 - 2\tau$$
$$y = 2 - 2\tau.$$

Odečtením rovnic dostaneme obecnou rovnici

$$x - y + 3 = 0.$$

**Řešení příkladu 8.** Směrový vektor tečny je (derivováním) $(1, 2t, 3t^2)$. Ten musí být kolmý na normálový vektor dané roviny $(1, 2, 1)$. Jejich skalární součin tedy musí být roven nule. Odtud $1 + 4t + 3t^2 = 0$ a řešíme kvadratickou rovnici. Získané hodnoty parametru $t$ dosadíme do předpisu $f(t)$ a dostaneme dva body $[-1, 1, -1], [-1/3, 1/9, -1/27]$.

**Řešení příkladu 9.** Vždy nejprve zkusíme dosadit!

(i) Dosazením $= -\frac{5}{16}$.
(ii) Typ $\frac{0}{0}$. Pozor, pro více než jednu proměnnou nemáme L'Hospitalovo pravidlo! Vynásobením čitatele i jmenovatele výrazem $\sqrt{x^2+y^2+1}+1$, pokrácením a dosazením $= 2$.
(iii) Sinus je omezená funkce. Krát nula $= 0$.
(iv) Typ $\frac{0}{0}$. Rozšíříme $y/y$. Sinus argumentu jdoucího do nuly lomeno tímto argumentem jde k $1$. Krát nula $= 0$.
(v) Opět typ $\frac{0}{0}$. Transformací do polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos\varphi \\ y &= y_0 + r\sin\varphi, \end{aligned}$$

a $r \to 0$, kde $[x_0, y_0] = [0, 0]$ dostaneme limitu typu nula krát omezená $= 0$.

**Řešení příkladu 10.** Pokud dostaneme jinou hodnotu aspoň ve dvou různých směrech, limita neexistuje.
(i) Přiblížením po přímkách – substitucí $y = kx + q$, kde $q$ dopočítáme dosazením bodu $[0, 0]$ za $[x, y]$ (zde $q = 0$) – dostaneme limitu jedné proměnné $x \to$ příslušný bod ze zadání, zde nula. Tato limita vyjde závislá na $k$. Původní limita tedy neexistuje
(ii) Stejně jako u předchozí limity zkusíme přímky – vyjde $0$. (To neimplikuje existenci limity!) Zkusíme jít po parabolách – zde $y = kx^2$. Výsledek bude záviset na $k$, limita tedy neexistuje.

**Řešení příkladu 11.** Dvojná limita neexistuje, protože se dvojnásobné limity nerovnají. (První $= 1/2$, druhá $= \infty$.) K proměnné, kterou "nikam neposíláme" se chováme jako ke konstantě. Nejprve spočítáme vnitřní limitu, potom vnější z výsledku té vnitřní.

**Řešení příkladu 12.** Při počítání parciální derivace podle jedné proměnné se k ostatním proměnným chováme jako ke konstantám.

$$f'_x = 5x^4 + 36x^2y, \quad f'_y = 12x^3 - 7y^6,$$
$$f''_{xx} = 20x^3 + 72xy, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 36x^2,$$
$$f'''_{xxy} = f'''_{yxx} = f'''_{xyx} = 72x$$

**Řešení příkladu 13.** Bod $[1, -1]$ a vektor $(1, 2)$ dávají přímku

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= -1 + 2t. \end{aligned}$$

Dosazením za $x, y$ do předpisu funkce $f$ dostaneme funkci jedné proměnné $\varphi(t)$. Požadovaná derivace je potom dle definice

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = -\frac{2}{5},$$

kde jsme ve výpočtu poslední limity (funkce jedné proměnné) použili L'Hospitalovo pravidlo.
Výpočet pomocí gradientu (diferenciálu) provedeme tak, že spočítáme parciální derivace prvního řádu funkce $f$ v bodě $[1, -1]$, a poskládáme je do vektoru. Ten skalárně vynásobíme s vektorem $(1, 2)$.

**Řešení příkladu 14.** Při počítání parciální derivace podle jedné proměnné se k ostatním proměnným chováme jako ke konstantám.
(i) $f'_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad f'_y(x, y) = x^y \ln x$
(ii) $f'_x(x, y, z) = \mathrm{e}^{x^2(1-y-z)}(1 - y - z)2x,$
$f'_y(x, y, z) = \mathrm{e}^{x^2(1-y-z)}(-x^2),$
$f'_z(x, y, z) = \mathrm{e}^{x^2(1-y-z)}(-x^2)$

**Řešení příkladu 15.** Spočítáme parciální derivace a dosadíme daný bod.
(i) $f'_x(2, 5) = 2\sqrt{5}, \quad f'_y(2, 5) = 10 + \sqrt{5},$
(ii) $f'_x(1, 2) = 0, \quad f'_y(1, 2) = \frac{1}{4}$

**Řešení příkladu 16.** Spočítáme diferenciál ($\mathrm{d}f = f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y$) funkce $f(x,y) = \log_2(x^2 + y)$, kde $[x,y] = [1,96; 4,02]$, $[x_0,y_0] = [2,4]$, $\mathrm{d}x = x - x_0 = -0,04$, $\mathrm{d}y = y - y_0 = 0,02$.
Požadovaný odhad je roven $f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0) = 2,9\overline{74}$, přesná hodnota je $2,9748\ldots$.

**Řešení příkladu 17.** Funkci zvolíme $f(x,y) = x^y$, bod $[x_0,y_0]$ zvolíme $[1,2]$.
Výsledný odhad je $1,08$.

**Řešení příkladu 18.** Spočítáme parciální derivace v příslušném bodě $[x_0,y_0]$ a dosadíme do vzorce

$$z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Pro funkce více než dvou proměnných podobně.

(i) $x - 30y + z + 46 = 0$,
(ii) $2x_1 + \sqrt{2}x_2 - 2\sqrt{2}x_3 - x_4 + 6 + 4\sqrt{2} = 0$

**Řešení příkladu 19.**

$$f''(\mathrm{e},2) = \mathrm{Hf}(\mathrm{e},2) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(\mathrm{e},2) & f''_{xy}(\mathrm{e},2) \\ f''_{yx}(\mathrm{e},2) & f''_{yy}(\mathrm{e},2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3\mathrm{e} \\ 3\mathrm{e} & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$$

**Řešení příkladu 20.** Taylorův polynom druhého řádu spočítáme v bodě $[1,1]$, který je blízko bodu ze zadání, a buď tam hodnotu dané funkce umíme spočítat, nebo najít v tabulkách.... Stačí dosadit do vzorce:

$$\begin{aligned} T_2(f)(1,1) &= f(1,1) + \begin{pmatrix} f'_x(1,1) & f'_y(1,1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{Hf}(1,1) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\left(x^2 + y^2 - 4xy + 8x + 8y - 14\right) + \ln 3. \end{aligned}$$

V bodě $[1,1; 1,2]$ je hodnota přibližně $1,295$.

**Řešení příkladu 21.** Označme $F = \{f,g\}$. Jacobián (determinant Jacobiho matice) je potom roven

$$\begin{vmatrix} f_r & f_\varphi \\ g_r & g_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

**Řešení příkladu 22.** Jacobiho matice v daném bodě je

$$\begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Jacobián je tedy roven $-4$, což je nenulové číslo, a zobrazení $F$ je tedy v okolí bodu $[2,1]$ prosté. Jacobiho matici inverzního zobrazení dostaneme jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Řešení příkladu 23.** Nejprve určíme stacionární body – spočítáme parciální derivace prvního řádu a položíme je rovny nule. Jako řešení této soustavy rovnic dostaneme body $[0,0]$, $[4,0]$, $[0,4]$, $[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$.
K určení extrémů použijeme matici druhých parciálních derivací:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Jestliže bude v daném bodě pozitivně/negativně definitní, potom je zde lokální minimum/maximum. Pokud bude indefinitní, extrém zde nenastává a pokud bude semidefinitní, nelze rozhodnout.
Pro funkci dvou proměnných to znamená, že pokud bude determinant matice druhých parciálních derivací v bodě záporný, extrém nenastane (zde body $[0,0]$, $[4,0]$, $[0,4]$), pokud bude nula, nelze ihned rozhodnout, a pokud bude kladný (zde bod $[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$), je v daném bodě extrém. Zda jde o min., nebo max. rozhodneme dle znaménka $f_{xx}$ – zde $= -\frac{8}{3}$, tedy záporné. V bodě je lokální maximum s hodnotou $\frac{64}{27}$.

**Řešení příkladu 24.** Globální extrém může být ve stacionárním bodě nebo na hranici množiny. U vypočítaných bodů se vždy ujistíme, že patří do dané množiny, jinak ho můžeme "vyškrtnout". Stacionární body vyjdou $[0,0], [0,1], [0,-1], [1,0], [-1,0]$.
Nyní otestujeme funkci na hranici množiny $M$. Nejprve na horní půlkružnici – dosadíme $y = \sqrt{4-x^2}$ a najdeme stacionární body výsledné funkce jedné proměnné $g(x) = (12-x^2)\mathrm{e}^{-4}$ pro $x \in [-2,2]$. Nesmíme zapomenout přidat mezi "podezřelé body" body hraniční, zde $x = \pm 2 \Rightarrow [0,2]$.
Podobně otestujeme funkci na dolní půlkružnici – dosazením $y = -\sqrt{4-x^2}$. Zde nám přibude pouze bod $[0,-2]$ (hraniční body už na seznamu máme).
Práci jsme si v tomto speciálním případě mohli zjednodušit přímo dosazením $y^2 = 4-x^2$, protože proměnná $y$ se ve funkci objevuje pouze v sudých mocninách. Ani v tomto případě ovšem nesmíme zapomenout přidat na "seznam kandidátů" body $[-2,0], [2,0]$.
Ve všech bodech našeho seznamu nyní spočítáme funkční hodnoty a zjistíme, kde nastává globální maximum (zde v $[0,1], [0,-1]$ s hodnotou $\frac{3}{\mathrm{e}}$) a kde glob. minimum (zde v $[0,0]$ s hodnotou $0$).

**Řešení příkladu 25.** $z = z(x,y)$ lze ze zadání explicitně vyjádřit. Porovnejte si, že to, co děláme s implicitní funkcí, jsou už známé věci.
Rovnice tečny je tvaru

$$z - z_0 = z_x(x-x_0) + z_y(y-y_0).$$

Potřebujeme určit jen $z_x, z_y$ v daném bodě $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, \frac{5}{6}]$. Derivujme předpis ze zadání podle $x$ a mějme na paměti, že $z$ je funkcí proměnných $x, y$. Dostaneme rovnost

$$9x - 3y^2 - 3z_x = 0,$$

ze které jednoduše vypočítáme $z_x = \frac{9x-3y^2}{3} = 2$. Podobně $z_y = \frac{3y^2-6xy}{3} = -1$.
Podmínka, aby daný předpis vůbec v okolí našeho bodu nějakou funkci implicitně zadával, je zde přímo jako požadavek, že v předpisech pro $z_x, z_y$ nesmí být ve jmenovateli nula.
Dosazením a úpravou obdržíme rovnici tečny

$$2x - y - z - \frac{1}{6} = 0.$$

**Řešení příkladu 26.** Jde o implicitně zadanou funkci jedné proměnné $y = y(x)$. K rozhodnutí potřebujeme znát hodnotu druhé derivace v daném bodě (resp. její znaménko).
Derivujeme rovnost ze zadání podle $x$

$$9x - 3y^2 - 3x2yy' + 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{9x-3y^2}{3y^2-6xy} = 2.$$

Ve jmenovateli se nula neobjevila, funkce daná implicitně v okolí daného bodu tedy "existuje". Derivujeme rovnost podruhé (pozor na derivace součinů – $y$ je funkcí proměnné $x$). Do výsledného vzorce dosadíme za $x, y, y' \Rightarrow y'' = \frac{15}{9} > 0$. Graf je nad tečnou.

**Řešení příkladu 27.** Postupujeme podobně jako v předchzím příkladě, jen $z = z(x,y)$ je funkce *dvou* proměnných. Dostanem:

$$z_x = -\frac{1}{4}, z_y = -\frac{1}{2}, z_{xx} = -\frac{3}{32}, z_{yy} = -\frac{7}{8}, z_{xy} = -\frac{3}{16}.$$

Protože

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \frac{12}{16^2} > 0, \quad z_{xx} < 0,$$

je graf pod tečnou rovinou.

**Řešení příkladu 28.** Jde o kouli o poloměru $4$ a středu $[1,3,0]$, takže přesně víme, co by nám mělo vyjít. Položíme parciální derivace prvního řádu (získané jako v předch. příkladech) rovny nule. Odtud dostaneme

stacionární body $[1, 3, 4], [1, 3, -4]$.
Protože v obou bodech
$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{16} > 0,$$
jsou v obou extrémy. V bodě $[1, 3, 4]$ je $z_{xx} = -\frac{1}{4} < 0$, je tam tedy lok. maximum. V bodě $[1, 3, -4]$ je $z_{xx} = \frac{1}{4} > 0$, je tam tedy lok. minimum.

**Řešení příkladu 29.** Normála v bodě $[x_0, y_0]$ je dána
$$x = x_0 + tf'_x(x_0, y_0),$$
$$y = y_0 + tf'_y(x_0, y_0).$$
Rovnoběžnost s osou $y$ je totéž jako kolmost na osu $x$ a kolmost znamená nulový skalární součin. Tedy
$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x_0 - 2 \\ 6y_0 + 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$
Odtud $x_0 = 1$. To dosadíme do rovnice elipsy a vypočítáme $y_0$. $\Rightarrow$ body $[1, 1], [1, -3]$.

**Řešení příkladu 30.**
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2,$$
$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = x_0 = 2,$$
$$f'_y(x_0, y_0, z_0) = -3,$$
$$f'_z(x_0, y_0, z_0) = 4z_0 = -4.$$
Tečná nadrovina je dána
$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$
tedy máme
$$2x - 3y - 4z - 4 = 0.$$
Normála je dána
$$x = x_0 + tf'_x(x_0, y_0, z_0) = 2 + 2t,$$
$$y = y_0 + tf'_y(x_0, y_0, z_0) = \frac{4}{3} - 3t,$$
$$z = z_0 + tf'_z(x_0, y_0, z_0) = -1 - 4t.$$

**Řešení příkladu 31.** Nejprve sestavíme Lagrangeovu funkci
$$L(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$
a derivujeme ji podle všech proměnných. Tyto parciální derivace položíme rovny nule a řešíme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých:
$$x(\frac{1}{2} + 2\lambda) = 0,$$
$$y(\frac{2}{9} + 2\lambda) = 0,$$
$$z(\frac{2}{25} + 2\lambda) = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$
Vždy zvolíme $\lambda$ tak, aby jedna z prvních tří rovnic byla splněna ($= 0$), další dvě vyřeší položení příslušných proměnných $= 0$ a třetí proměnnou vypočítáme ze čtvrté rovnice. Dostaneme $6$ stacionárních bodů

$[\pm 1, 0, 0], [0, \pm 1, 0], [0, 0, \pm 1]$ a k nim příslušné hodnoty $\lambda$ (postupně $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{25}$). Zda v nich nastává extrém zjistíme z definitnosti formy dané

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yx} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix}.$$

Tj., pokud je výraz

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yx} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$$

kladný pro všechna $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \neq (0, 0, 0)$, pak je pozitivně definitní, pokud záporný, pak je negativně definitní a pokud najdeme dva vektory takové, že je daný výraz pro jeden kladný a pro druhý záporný, pak je indefinitní. $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ ovšem bereme jen z tečného prostoru množiny $M$, tedy takové, jež splňují podmínku

$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y + 2z\mathrm{d}z = 0.$$

Dosazením bodu $[1, 0, 0]$ do této podmínky dostaneme, že $\mathrm{d}x = 0$. Vyšetřovaný výraz je tedy (pro tento bod $\lambda = -\frac{1}{4}$)

$$-\frac{5}{18}(\mathrm{d}y)^2 - \frac{21}{50}(\mathrm{d}z)^2,$$

který je pro každé $(\mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \neq (0, 0)$ záporný. Vyšetřovaná forma je tedy negativně definitní a v bodě $[1, 0, 0]$ je ostré lokální maximum.

Podobně zjistíme, že maximum nastává i v bodě $[-1, 0, 0]$, minimum v $[0, 0, \pm 1]$ a v $[0, \pm 1, 0]$ extrém funkce nemá, protože je zde forma indefinitní.

**Řešení příkladu 32.** 2 (téměř stejné) postupy:

## *Postup 1*

Úlohu zformulujeme do matematického zápisu: Označíme $x$ – hledaný počet výrobků $V_1$ a $y$ – hledaný počet výrobků $V_2$. Chceme maximalizovat zisk

$$f = 7x + 9y \quad \text{[tis. Kč zisku]}$$

za omezujících podmínek

$$\begin{aligned} 3x + 5y &\leq 180 \quad \text{[kg surovin]} \\ 5x + 4y &\leq 240 \quad \text{[hodin práce]} \\ 10x + 2y &\leq 160 \quad \text{[tis. Kč nákladů]} \end{aligned}$$

poslední část tvoří podmínky nezápornosti

$$x, y \geq 0.$$

Úlohu převedeme na standardní tvar přidáním tzv. doplňkových proměnných:

$$\begin{array}{cccccl} 3x & +5y & +u & & & = 180 \\ 5x & +4y & & +v & & = 240 \\ 10x & +y & & & +w & = 160 \\ x, & y, & u, & v, & w & \geq 0 \\ -7x & -9y & +f & & & = 0 \end{array}$$

Zapíšeme do simplexové tabulky (ST) a řešíme:

| | $x$ | $y$ | $u$ | $v$ | $w$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 3 | 5 | 1 | 0 | 0 | 180 |
| $v$ | 5 | 4 | 0 | 1 | 0 | 240 |
| $w$ | 10 | 2 | 0 | 0 | 1 | 160 |
| $f$ | $-7$ | $-9$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

Nyní ověříme, zda toto řešení je či není optimální: Test optimality (TO) (pro maximalizační úlohu – pro minimalizační obráceně): v posledním řádku jsou nezáporná čísla a pod bázickými proměnnými jsou nuly, pak je řešení optimální. V našem případě není splněn. Pokračujeme na další krok.

V dalším kroku musíme najít řešení, které je "blíže" hledanému optimálnímu řešení. Určíme si klíčové políčko v ST. V posledním řádku najdeme "nejzápornější" číslo, zde $-9$. To ukazuje na sloupec $y$. Pro tento sloupec spočítáme podíly: $180/5 = 36$, $240/4 = 60$ a $160/2 = 80$ – nejmenší z nich je 36 (případným záporným nedělíme – rovnou vynecháme), tedy vyměníme v levém sloupci $u$ za $y$ a přepočítáme tabulku tak, aby v klíčovém políčku byla 1 a v příslušném sloupci nuly – používáme běžné řádkové maticové úpravy.

| | $x$ | $y$ | $u$ | $v$ | $w$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $3/5$ | 1 | $1/5$ | 0 | 0 | 36 |
| $v$ | $13/5$ | 0 | $-4/5$ | 1 | 0 | 96 |
| $w$ | $44/5$ | 0 | $-2/5$ | 0 | 1 | 88 |
| $f$ | $-8/5$ | 0 | $9/5$ | 0 | 0 | 324 |

TO: není splněn. Pokračujeme ve vyměňování proměnných. Klíčové políčko leží v prvním sloupci ($-8/5$) a ve třetím řádku ($36/(3/5) = 60$, $96/(13/5) \doteq 36,9$ a $88/(44/5) = 10$). Takže vyměníme $w$ za $x$ a upravíme příslušný sloupec na "nulajedničkový".

| | $x$ | $y$ | $u$ | $v$ | $w$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | $5/22$ | 0 | $-3/44$ | 30 |
| $v$ | 0 | 0 | $-15/22$ | 1 | $-13/44$ | 70 |
| $x$ | 1 | 0 | $-1/22$ | 0 | $5/44$ | 10 |
| $f$ | 0 | 0 | $19/11$ | 0 | $2/11$ | 340 |

TO: je splněn, tedy řešení z tabulky kroku 2 je optimální.

Optimální řešení je určeno vektorem $(x, y, u, v, w) = (10, 30, 0, 70, 0)$, jemuž odpovídá hodnota účelové funkce $f_{opt} = 340$.

Interpretace - viz konec postupu 2.

## *Postup 2*

Úlohu zformulujeme do matematického zápisu: Označíme $x_1$ – hledaný počet výrobků $V_1$ a $x_2$ – hledaný počet výrobků $V_2$. Chceme maximalizovat zisk

$$z_{max} = 7x_1 + 9x_2 \quad \text{[tis. Kč zisku]}$$

za omezujících podmínek

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 180 \quad \text{[kg surovin]} \\ 5x_1 + 4x_2 &\leq 240 \quad \text{[hodin práce]} \\ 10x_1 + 2x_2 &\leq 160 \quad \text{[tis. Kč nákladů]} \end{aligned}$$

poslední část tvoří podmínky nezápornosti

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Úlohu převedeme na standardní tvar přidáním tzv. doplňkových proměnných:

$$\begin{array}{rcccccl} z_{max} = & 7x_1 & +9x_2 & (+0x_3 & +0x_4 & +0x_5) & \\ & 3x_1 & +5x_2 & +x_3 & & & = 180 \\ & 5x_1 & +4x_2 & & +x_4 & & = 240 \\ & 10x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 160 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

*Pozn.* Proměnné $x_1$ a $x_2$ se nazývají bázické.

Zapíšeme do simplexové tabulky (ST) a řešíme:

| | | | 7 | 9 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | báze | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| 0 | $x_3$ | 180 | 3 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $x_4$ | 240 | 5 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $x_5$ | 160 | 10 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| 0. krok | | $z = 0$ | $\Delta_1 = -7$ | $\Delta_2 = -9$ | $\Delta_3 = 0$ | $\Delta_4 = 0$ | $\Delta_5 = 0$ |

Poslední řádek v ST se nazývá indexní řádek, hodnoty v něm získáme následovně:
$z = \langle c, b\rangle = 0 \cdot 180 + 0 \cdot 240 + 0 \cdot 160 = 0$,
indexní čísla $\Delta_i = z_i - c_i = \langle c, \alpha_i\rangle - c_i$, kde $\alpha_i$ je sloupcový vektor pod $i$-tou proměnnou v ST. Např. $\Delta_1 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 7 = -7$, $\Delta_4 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$. Dále ověříme, zda toto řešení je či není optimální: Test optimality (TO) (pro maximalizační úlohu – pro minimalizační obráceně): v indexním řádku jsou nezáporná čísla a pod bázickými proměnnými jsou nuly, pak je řešení optimální. V našem případě není splněn. Pokračujeme na další krok.

V dalším kroku musíme najít řešení, které je "blíže" hledanému optimálnímu řešení. Určíme si klíčové políčko v ST. V indexním řádku najdeme číslo $\Delta$, které splňuje $\min \Delta_j$ pro $\Delta_j < 0$. V daném sloupci najdeme klíčové políčko: to splňuje $\min \frac{b_i}{\alpha_{ik}}$ pro $\alpha_{ik} > 0$.
V našem případě to je sloupec s proměnnou $x_2$, protože $\Delta_2 = -9$ "je nejzápornější ze záporných". Pro tento sloupec spočítáme podíly: $180/5 = 36$, $240/4 = 60$ a $160/2 = 80$ – nejmenší z nich je 36, tedy vyměníme v bázi $x_3$ za $x_2$ (včetně koef. $c_i$) a přepočítáme tabulku tak, aby v klíčovém políčku byla 1 a v příslušném sloupci nuly – používáme maticové úpravy (k vnitřku tabulky se chováme jako k matici).

| | | | 7 | 9 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | báze | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| 9 | $x_2$ | 36 | $3/5$ | 1 | $1/5$ | 0 | 0 |
| 0 | $x_4$ | 96 | $13/5$ | 0 | $-4/5$ | 1 | 0 |
| 0 | $x_5$ | 88 | $44/5$ | 0 | $-2/5$ | 0 | 1 |
| 1. krok | | $z = 324$ | $\Delta_1 = -8/5$ | $\Delta_2 = 0$ | $\Delta_3 = 9/5$ | $\Delta_4 = 0$ | $\Delta_5 = 0$ |

TO: není splněn, protože $\Delta_1 = -8/5$. Pokračujeme ve vyměňování proměnných. Klíčové políčko leží v prvním sloupci ($\Delta_1 = -8/5$) a ve třetím řádku ($36/(3/5) = 60$, $96/(13/5) \doteq 36,9$ a $88/(44/5) = 10$). Takže vyměníme $x_5$ za $x_1$ a upravíme příslušný sloupec na "nulajedničkový".

| | | | 7 | 9 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | báze | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| 9 | $x_2$ | 30 | 0 | 1 | $5/22$ | 0 | $-3/44$ |
| 0 | $x_4$ | 70 | 0 | 0 | $-15/22$ | 1 | $-13/44$ |
| 7 | $x_1$ | 10 | 1 | 0 | $-1/22$ | 0 | $5/44$ |
| 2. krok | | $z = 340$ | $\Delta_1 = 0$ | $\Delta_2 = 0$ | $\Delta_3 = 19/11$ | $\Delta_4 = 0$ | $\Delta_5 = 2/11$ |

TO: je splněn, tedy řešení z tabulky kroku 2 je optimální.

Optimální řešení je určeno vektorem $x_{opt} = (10, 30, 0, 70, 0)$, jemuž odpovídá hodnota účelové funkce $z_{opt} = 340$.

Protože zadání "bylo z reálu", je potřeba interpretovat výsledky ST.
Maximální zisk ve výši 340 tis. Kč lze dosáhnout za předpokladu, že bude vyráběno 10 kusů výrobku $V_1$ a 30 kusů $V_2$. Při takovémto rozložení výroby budou beze zbytku využity suroviny a náklady (první a třetí omezení), proto $x_3$ a $x_5$ jsou rovny 0. Ale nevyužito zůstane 70 hodin práce, což ukazuje doplňková proměnná $x_4$ (ve výsledku).

**Řešení příkladu 33.** Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \lambda_2(x + y + z).$$

Stacionární body dostaneme jako řešení soustavy rovnic

$$L'_x = yz - 2x\lambda_1 - \lambda_2, \tag{1}$$
$$L'_y = xz - 2y\lambda_1 - \lambda_2, \tag{2}$$
$$L'_x = xy - 2z\lambda_1 - \lambda_2, \tag{3}$$
$$L'_{\lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \tag{4}$$
$$L'_{\lambda_2} = x + y + z. \tag{5}$$

Z rovnic (1), (2), (3) vyloučíme $\lambda_2$ jejich vzájemným odečtením. Po úpravě dostaneme soustavu

$$(1) - (2) \Rightarrow (y - x)(z + 2\lambda_1) = 0, \tag{6}$$
$$(2) - (3) \Rightarrow (z - y)(x + 2\lambda_1) = 0, \tag{7}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{8}$$
$$x + y + z = 0. \tag{9}$$

První dvě rovnice jsou ve tvaru "součin = 0", tj. jsou splněny, jestliže je v každé některá závorka nulová. Odtud dostaneme informace, které nám (po dosazení do (8), (9)) dají stac. body a multiplikátory

$$\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right]\left(\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right), \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right]\left(\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right),$$
$$\left[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]\left(\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right), \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right]\left(\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right),$$
$$\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]\left(\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right), \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right]\left(\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right).$$

**Řešení příkladu 34.** Podobně jako u perciálních derivací, k ostatním proměnným se chováme jako ke konstantám.

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z \,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^x \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \int_0^x \frac{x^2+y^2}{2} \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^x \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 + \frac{x^3}{3} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

**Řešení příkladu 35.** Množina $A$ je zobrazena na obrázku 11. Jako první integrujme nejprve přez $x$ (vnitřní integrál), potom $y$ (vnější integrál). Abychom určili meze vnějšího integrálu, jdeme po ose $y$ a omezíme množinu $A$ konstantami - zde $y = 2$ až $y = 4$. Máme tedy

$$\int_2^4 \int_?^? f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

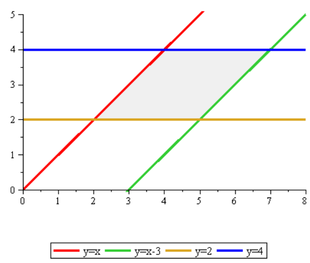
Abychom se dozvěděli, co patří místo otazníků, musíme jít po ose $x$ a omezit mnozinu přesně. Zde $x = y$ až $x = y + 3$. Výsledek je tedy

$$\int_2^4 \int_y^{y+3} f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

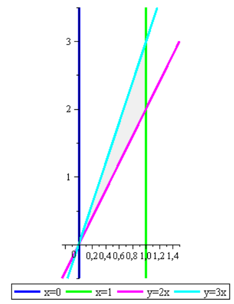
Protože v opačném pořadí bude uvnitř $y$, budeme muset zapsat spodní a horní hranici (spodní a horní ve smyslu osy $y$, tedy tak, jek to vidíme na obrázku) každou pomocí jediné formule, což nelze. Využijeme tedy aditivity integrálu a množinu si rozdělíme na několik kusů, na kterých to půjde. Zde na tři - od 2 do

4, od $4$ do $5$ a od $5$ do $7$. Tím máme určeny meze vnějších integrálů a vnitřní určíme na každém kousku podobně jako v předchozím případě. Dostaneme

$$\int_2^4 \int_2^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_4^5 \int_2^4 f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_5^7 \int_{x-3}^4 f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$




OBRÁZEK 11.



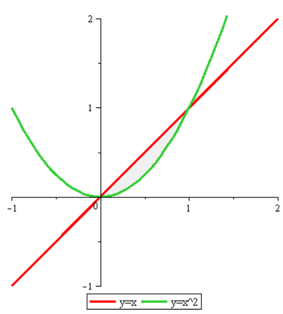

OBRÁZEK 12.

**Řešení příkladu 36.** Z mezí integrálů určíme množinu – viz obr. 12 a postupem z předchozího příkladu dostaneme

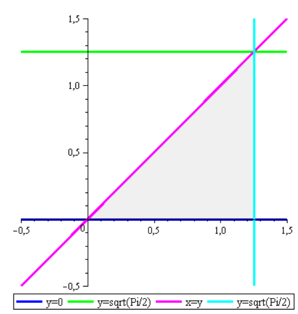
$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_2^3 \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**Řešení příkladu 37.** Množina je zobrazena na obr. 13. Zvolíme si pořadí integrace, zjistíme meze a použitím základních vzorců dostaneme

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x+y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{20}.$$




OBRÁZEK 13.




OBRÁZEK 14.

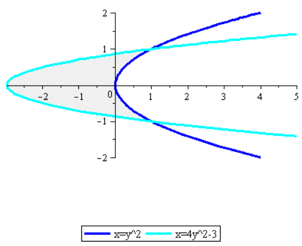
**Řešení příkladu 38.** Nejprve zaměníme pořadí integrace. Z mezí integrálů určíme množinu – viz obr. 14 a dostaneme

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^x y^2 \sin x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

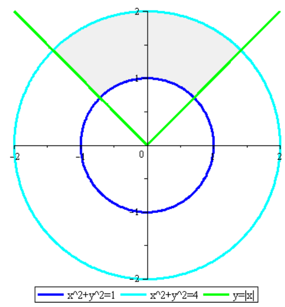
Vnitřní integrál už bez problémů zvládneme (sinus je pro vnitřní integrál konstanta) a na jednoduchý integrál, který vyjde, použijeme nejprve substituci $t = x^2$, poté metodu per partes. Výsledkem je $1/6$.

**Řešení příkladu 39.** Množina je na obrázku 15. Abychom spočítali její povrch, stačí spočítat povrch její horní poloviny a zdvojnásobit jej (povrch, objem apod. = integrál z jedničky):

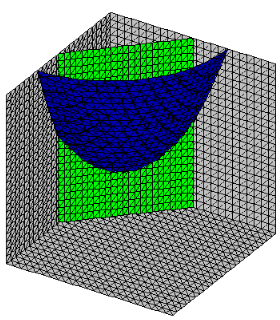
$$2\int_0^1 \int_{4y^3-3}^{y^2} 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ldots = 4.$$



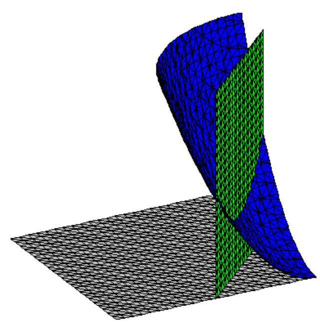

OBRÁZEK 15.




OBRÁZEK 16.



OBRÁZEK 17.



OBRÁZEK 18.

**Řešení příkladu 40.** Množina je na obrázcích 17 a 18. Postupujeme opět od vnějšího integrálu. Zvolme si pořadí integrace $z, y, x$, tj.

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? 1 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Nejprve množinu omezíme v rovině $xy$. Tak dostaneme meze pro dve vnější integrály (jako by to byl dvojnásobný integrál na množině dané projekcí naší množiny $A$ do roviny $xy$, což je trojúhelník s vrcholy $[0,0], [0,1], [1,0]$). Následně najdeme předpis pro spodní a horní omezení množiny $A$ ve smyslu zbylé proměnné $z$.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2+y^2} 1 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{6}.$$

**Řešení příkladu 41.** Množina je zobrazena na obr. 16. Integrál Převedeme do polárních souřadnic:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Kde $r \in [0, \infty)$ je vzdálenost od počátku a $\varphi \in [0, 2\pi]$ je úhel odklonu od kladné poloosy $x$ v kladném smyslu, tj. proti směru hod. ručiček (od kladné poloosy $x$ směrem ke kladné poloose $y$). Absolutní hodnota Jacobiánu této transformace je $r$.

Z obrázku určíme meze pro $r$ a $\varphi$:

$$r \in [1,2], \qquad \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$$

a transformujeme integrovanou funkci:

$$2(x^2+y^2) = \ldots = r^2.$$

Tím jsme dostali integrál (nesmíme zapomenout funkci vynásobit abs. hodnotou Jacobiánu - změnit měřítko)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_{1}^{2} 2r^2 r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{15}{4}\pi.$$

Pořadí integrace jsme si mohli zvolit libovolně, protože v mezích máme jen čísla a žádné funkce (poloměr je ve všech směrech ze stejného intervalu a nemění se v závislosti na úhlu).

**Řešení příkladu 42.** Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě. První dvě rovnice zadávající množinu jsou posunuté kružnice. Aby se dobře kreslily, upravíme si jejich rovnice - např.

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2,$$

jde tedy o kružnici o poloměru 2 se středem v bodě $[2,0]$ (viz obr. 19).

Meze pro úhel zjistíme z rovnic přímek $y = x, y = 2x$. Jejich směrnice je tangens jejich odklonu od kladné poloosy $x$, takže $\varphi \in [\mathrm{arctg}1, \mathrm{arctg}2] = [\pi/4, \mathrm{arctg}2]$. Nebo jednoduše dosadíme za $x, y$ do $y = x$ a $y = 2x$ a vypočítáme odtud $\varphi$, tj. např.

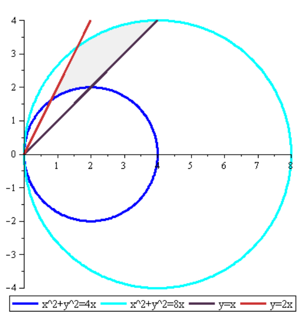
$$y = 2x \Rightarrow r\sin\varphi = 2r\cos\varphi \Rightarrow \mathrm{tg}\varphi = 2 \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}2.$$

Podobně, dosazením do rovnic kružnic, vypočítáme meze pro $r$. Dostaneme

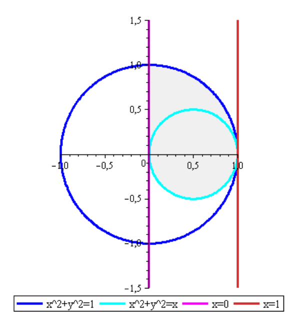
$$r \in [4\cos\varphi, 8\cos\varphi].$$

Poloměr se tedy mění v závislosti na úhlu, musíme dát "jeho integrál dovnitř". Výsledkem je

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}2} \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$




OBRÁZEK 19.




OBRÁZEK 20.

**Řešení příkladu 43.** Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladě s tím rozdílem, že množinu (viz obr. 20) musíme rozdělit na dvě části, na kterých jsme schopni udat meze poloměru. Dostaneme:

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1r \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_{0}^{\cos\varphi} 1r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{3}{8}\pi.$$

Přitom ve druhém integrálu jsme mohli vzít samozřejmě $\varphi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$.

**Řešení příkladu 44.** Množinu si snadno představíme pomocí řezů souřadnými rovinami – obr. 22. Jde o dva rotační paraboloidy – obr. 21. K výpočtu použijeme transformaci do cylindrických (válcových) souřadnic

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$
$$z = z,$$

kde $r, \varphi$ jsou stejné veličiny jako u polárních souřadnic v rovině a jako takové je budeme i určovat – díváme se na průmět dané množiny do roviny $xy$ (obr. 23). *(Odečtením rovnic paraboloidů od sebe z nich vyloučíme $z$.)* Absolutní hodnota Jacobiánu je $r$.

Takže máme

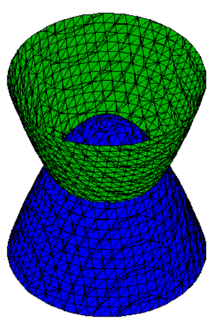
$$r \in [0,1], \qquad \varphi \in [0,2\pi].$$

Interval pro $z$ dostaneme jako odpověď na otázku "Jaký je předpis dolní/horní hranice množiny $A$?". Tedy

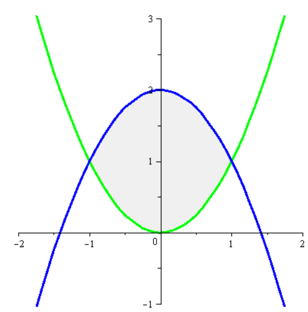
$$z \in [x^2+y^2, 2-(x^2+y^2)] = [r^2, 2-r^2].$$

Pořadí integrace musíme volit tak, aby $z$ bylo uvnitř integrálu pro $r$, protože je na něm závislé. Nyní můžeme počítat

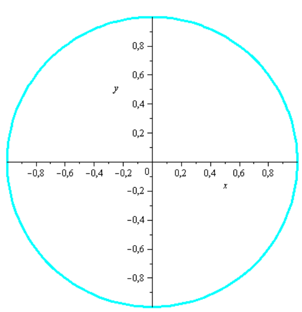
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2-r^2} 3z^2 r \,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{7}{2}\pi.$$



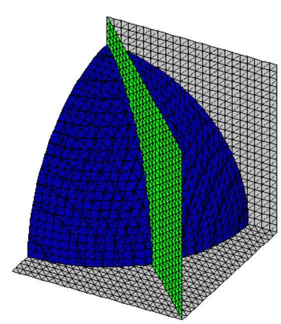
OBRÁZEK 21.




OBRÁZEK 22.




OBRÁZEK 23.



OBRÁZEK 24.

**Řešení příkladu 45.** Množina $A$ je $1/16$ koule v prvním kvadrantu, viz obr. 24. K výpočtu použijeme transformaci do sférických souřadnic

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = r\cos\theta,$$
$$|J| = r^2\sin\theta,$$

kde $r \in [0, \infty)$ je vzdálenost od počátku, $\varphi \in [0, 2\pi]$ je odklon od kladné poloosy $x$ směrem ke kladné poloose $y$ a $\theta \in [0, \pi]$ je odklon od kladné poloosy $z$ "dolů". Zde

$$r \in [0,1], \quad \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Vsechny hodnoty jsou dány velmi jednoduse bez jakékoli vzájemné závislosti, takže si můžeme zvolit pořadí integrace libovolně. Ještě musíme transformovat funkci – vytýkáním zjistíme, že $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ a protože $r \in [0, \infty)$, tedy nezáporné, je naše funkce $= r$. Tedy

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{1} r r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{\pi}{16}.$$

**Řešení příkladu 46.** Množina $A$ je průnik koule s nekonečným kuželem, viz obr. 25 a 26.

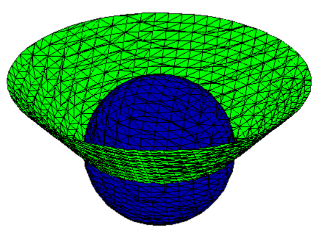
Válcové souřadnice:

$$r \in [0,1], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [r, 1 + \sqrt{1 - r^2}].$$

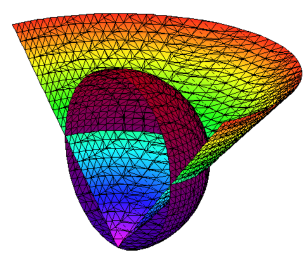
Sférické souřadnice:

$$r \in [0, 2\cos\theta], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

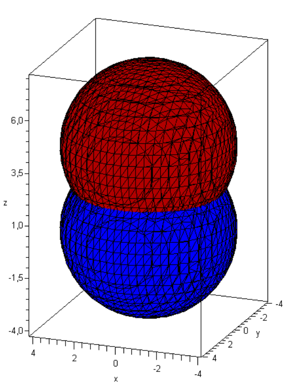
Protože počítáme objem, bereme integrovanou funkci $\equiv 1$ a nesmíme zapomenout na Jacobián. Vyjde $V = \pi$.



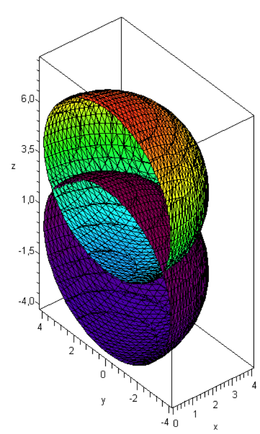
OBRÁZEK 25.



OBRÁZEK 26.




OBRÁZEK 27.




OBRÁZEK 28.

**Řešení příkladu 47.** Množina $A$ je průnik dvou koulí o stejném poloměru, viz obr. 27 a 28.

Válcové souřadnice:

$$r \in [0, \sqrt{12}], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [4 - \sqrt{16 - r^2}, \sqrt{16 - r^2}],$$

kde horní hranici pro poloměr $r$ získáme z průniku sfér daných rovnicemi ze zadání (průnikem je kružnice o poloměru $\sqrt{12}$). Vyjde $V = \frac{80}{3}\pi$.

Sférické souřadnice:
Zde je nutné množinu rozdělit na dvě části - viz obr. 29. První část:

$$r \in [0,4], \quad \varphi \in [0,2\pi], \quad \theta \in [0,\frac{\pi}{3}],$$

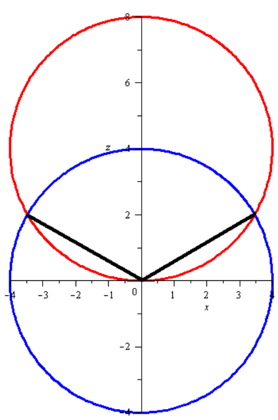
kde horní hranici pro úhel $\theta$, jsme získali pomocí zetové souřadnice průniku daných sfér ($z = 2, 4$ je poloměr dolní koule)

$$\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

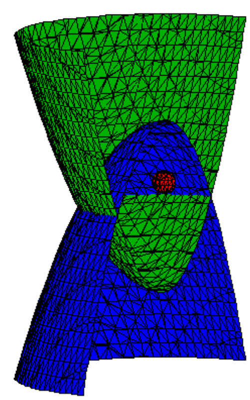
Vyjde $\frac{64}{3}\pi$.
Druhá část:

$$r \in [0, 8\cos\theta], \quad \varphi \in [0,2\pi], \quad \theta \in [\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}].$$

Vyjde $\frac{16}{3}\pi$.
Celkem tedy opět $V = \frac{80}{3}\pi$.



OBRÁZEK 29.



OBRÁZEK 30.

**Řešení příkladu 48.** Hustota je ze zadadání dána funkcí $\rho(x,y,z) = 3z^2$. Nejprve si spočítáme hmotnost tohoto tělesa (výpočet viz příklad 44)

$$M = \iiint\limits_A \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}A = \ldots = \frac{7}{2}\pi.$$

Souřadnice těžiště $T = [x_0, y_0, z_0]$ vypočítáme podobně ze vzorců

$$x_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_A \rho(x,y,z)x\,\mathrm{d}A = \ldots = 0,$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_A \rho(x,y,z)y\,\mathrm{d}A = \ldots = 0,$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_A \rho(x,y,z)z\,\mathrm{d}A = \ldots = \frac{9}{7}.$$

Tedy $T = [0,0,\frac{9}{7}]$, viz obr. 30.

**Řešení příkladu 49.**

$$I_x = \iint_A \rho(x,y)y^2 \,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{2x}^{3x} (x+y)y^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \ldots = \frac{271}{60},$$

$$I_y = \iint_A \rho(x,y)x^2 \,\mathrm{d}A = \ldots = \frac{7}{10}.$$

**Řešení příkladu 50.**

$$I_{xy} = \iint_A \rho(x,y)xy \,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{2x}^{3x} (x+y)xy \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \ldots = \frac{53}{30}.$$

**Řešení příkladu 51.** Geometrické $\Rightarrow$ bereme $\rho(x,y) \equiv 1$:

$$I_x = \iint_A 1y^2 \,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{2x}^{3x} y^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \ldots = \frac{73}{12},$$

$$I_y = \iint_A 1x^2 \,\mathrm{d}A = \ldots = \frac{1}{4}.$$

**Řešení příkladu 52.** Na každém subintervalu $[a,b]$ použijeme danou formuli a vše sečteme.

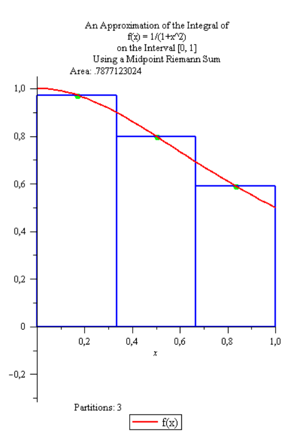
(a) $Q(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ – obdélník s jednou stranou délky intervalu, druhou jako funkční hodnota v polovině intervalu, viz obr. 31. Vyjde zaokrouhleně $0,787712$.

(b) $Q(f) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ – spojením 'funkčních hodnot' v krajních bodech intervalu dostaneme lichběžník, jehož obsah počítáme, viz obr. 33. Vyjde zaokrouhleně $0,780769$.

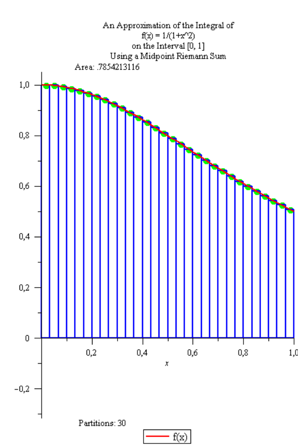
(c) $Q(f) = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$ – 'funkčními hodnotami' v krajních bodech intervalu a uprostřed intervalu proložíme parabolu, jejíž podgraf počítáme, viz obr. 34. Vyjde zaokrouhleně $0,785397945$.

Přesná hodnota je zaokrouhleně $0,785398163$. První dvě formule jsou obě řádu $1$, tedy obecně stejné přesnosti. Kvůli tvaru funkce (na celém intervalu konkávní) ale o něco lépe vyjde obdélníkové pravidlo. Na obrázku 31 vidíme, že chyby se na každém subintervalu 'dorovnávají', tj. obdélník vezme někde o kousek míň, jinde víc. Lichoběžníkové pravidlo (obr. 33) oproti tomu na každém subintervalu bere jen míň. Zdaleka nejlépe si vede Simpsonova formule, která je řádu dva. Funkce má na daných subintervalech totiž téměř tvar parabol.

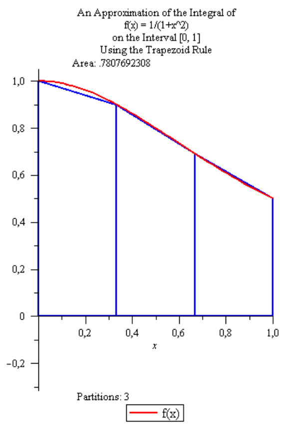
Na obrázku 32 je vyobrazeno obdélníkové pravidlo při rozdělení intervalu $[0,1]$ na $30$ subintervalů.



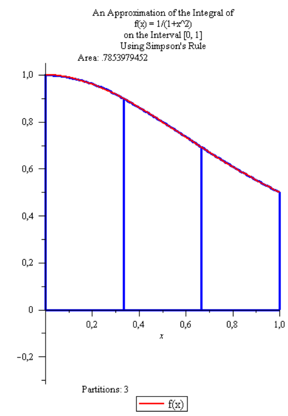

OBRÁZEK 31.




OBRÁZEK 32.




OBRÁZEK 33.




OBRÁZEK 34.

**Řešení příkladu 53.** Všech je $8$, neizomorfní $4$.

**Řešení příkladu 54.** Matice sousednosti $A$, počet daných sledů je číslo $a_{12} = 17$ v matici $A^4$.

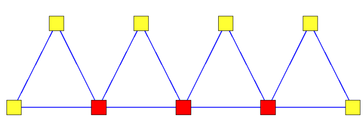
**Řešení příkladu 55.** (a) Není - lichý součet skóre.
(b) Ano, je - skončíme se dvěma vrcholy stupně $0$.
(DÚ) Ano, je - skončíme s pěti vrcholy stupně $0$.

**Řešení příkladu 56.** Použijeme algoritmus a snažíme se tvořit co největší rozdíly...

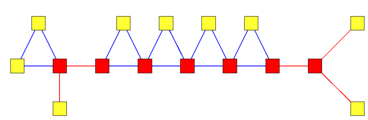
**Řešení příkladu 57.** Použití algoritmu.

**Řešení příkladu 58.** Most = hrana jejíž odebrání zvýší počet souv. komponent grafu (zde $3$).
Artikulace = vrchol jehož odebrání zvýší počet souv. komponent grafu (zde $4$).

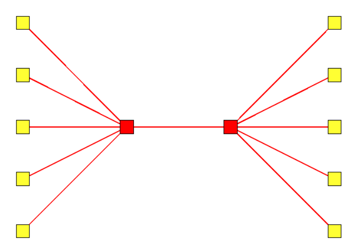
**Řešení příkladu 59.** Např. viz obr. 35, 36 a 37 (červeně jsou artikulace a mosty).



OBRÁZEK 35. (a)



OBRÁZEK 36. (b)



OBRÁZEK 37. (c)

**Řešení příkladu 60.** Vrcholově $2$-souvislé = odebráním lib. vrcholu zůstává souv. (každé dva vrch. na kružnici). První je, druhý není.

**Řešení příkladu 61.** Použití algoritmu (především pro orientovaný graf). První $4$ komponenty, druhý $6$.

**Řešení příkladu 62.** Použití algoritmu - skončíme po nalezení nejkr. cesty do požadovaného vrcholu (délka $11$).

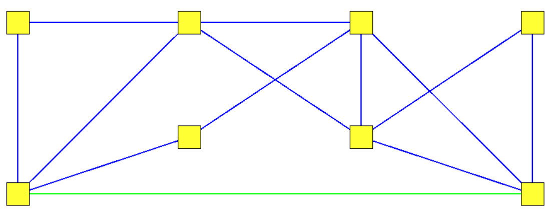
**Řešení příkladu 63.** Použití algoritmu - dokončíme předch.

**Řešení příkladu 64.** Použití algoritmu - skončíme po nalezení nejkr. cesty do požadovaného vrcholu (délka $6$).

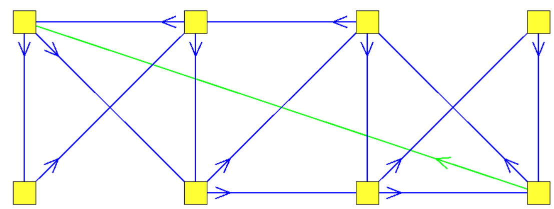
**Řešení příkladu 65.** Použití algoritmu - dokončíme předch.

**Řešení příkladu 66.** Použití algoritmu.

**Řešení příkladu 67.** První lze nakreslit jedním tahem (dva vrcholy lichého stupně), Eulerovský není - po přidání zeleně označené hrany v obr. 38 už ano.
Druhý je Eulerovský (souv. a vrcholy sudého st.).
Třetí není (není vyvážený) - stačí ale přidat zelenou hranu - viz obr. 39.

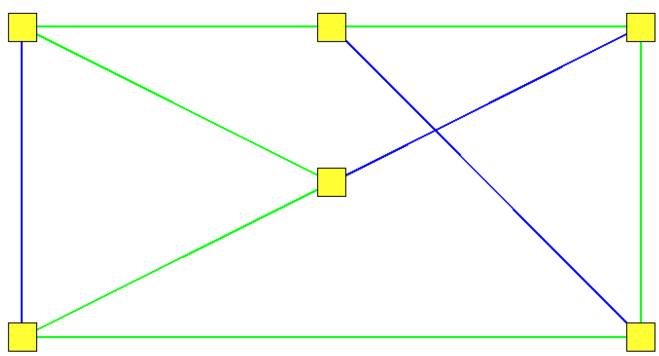


OBRÁZEK 38.



OBRÁZEK 39.

**Řešení příkladu 68.** Je Hamiltonovský. Ham. kružnice je na obr. 40 zeleně.



OBRÁZEK 40.

**Řešení příkladu 69.** Stromů s $n$ vrcholy je celkem $n^{n-2}$.

(a) 2 neizom., počty: $\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} = 16 = 4^2$,
(b) 3 neizom., počty: $\frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{4!} = 125 = 5^3$,
(c) 11 neizom., počty: $\frac{7!}{2!} + \frac{7!}{2!} + \frac{7!}{3!} + \frac{7!}{4!} + \frac{7!}{6!} + 7! + \frac{7!}{2!2!2!} + \frac{7!}{2!3!} + \frac{7!}{2!} + \frac{7!}{2!2!} + \frac{7!}{3!} = 16807 = 7^5$.

**Řešení příkladu 70.** Není, jeho podgraf obsahuje dělení grafu $K_{3,3}$.

**Řešení příkladu 71.** Existuje – skončíme se dvěma vrcholy stupně nula.
Rov. ne - musel by obsahovat aspoň jeden vrchol st. max. pět.

**Řešení příkladu 72.** Pro rov. graf $G = \{V, E\}$ s aspoň třemi vrcholy platí

$$|E| \leq 3|V| - 6,$$

kde rovnost je pro max. rov. graf. Odtud do prvního grafu lze přidat $16$ hran, do druhého $19$.

**Řešení příkladu 73.** Viz kód v násl. př.

**Řešení příkladu 74.** Viz strom v předch. př.

**Řešení příkladu 75.** Použití algoritmů.

**Řešení příkladu 76.** Použití algoritmů.

**Řešení příkladu 77.** (a) $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$,

(b) $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1512$,

(c) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

**Řešení příkladu 78.** (a) Ano – $K_{3,3}$ i $K_5$ mají min. 9 hran.

(b) Ne – $K_{3,3}$.

(c) Ne – $K_{3,3}$ s jedním vrcholem navíc spojeným jednou hranou s některým vrcholem $K_{3,3}$.

(d) Ne – $K_5$.

(e) Ne – $K_{3,3}$.

(f) Ne – $K_5$.

(g) Ne – $K_5$.

**Řešení příkladu 79.** Kostry tvoříme z hran ohodnocených jedničkou (celkem je jich 12).

**Řešení příkladu 80.**

$$00001011001110100111$$

**Řešení příkladu 81.** Použitím definic a algoritmu:

a) Ano. (Vtok = výtok všude mimo zdroje a stoku.)

b) 8.

c) Jsou stejné (= 8).

d) $C = \{(1,5), (2,4), (3,6)\}$.

e) $7 + 4 + 8 = 19 \geq$ hodnota toku.

f) $f(Z,S) - f(S,Z) = (3+4+7) - (6+0) = 14 - 6 = 8$.

g) $C_1 = \{(1,2), (5,2), (4,3), (4,6)\}$.

h) 26.

i) $f(Z_1,S_1) - f(S_1,Z_1) = (5+6+0+1) - (4) = 8$.

j) Algoritmus. Max. tok 12.

**Řešení příkladu 82.** Požití algoritmu – 13.

**Řešení příkladu 83.** Požití algoritmu – 8.

**Řešení příkladu 84.** Řez je množina hran, po jejichž odebrání se nelze dostat ze zdroje do spotřebiče (stoku).

**Řešení příkladu 85.** Požití algoritmu – 6.

**Řešení příkladu 86.** Není – selže např. na kružnici, která má jednu hranu ohodnocenou dvojkou, ostatní jedničkama a hledáme min. cestu mezi vrcholy spojenými hranou s ohodnocením dva.

**Řešení příkladu 87.** Algoritmus – 3 hrany.

**Řešení příkladu 88.** Algoritmus – 4 hrany.

**Řešení příkladu 89.** Algoritmus – 4 hrany.

**Řešení příkladu 90.** Algoritmus – max. tok 42.

**Řešení příkladu 91.** Algoritmus – max. tok 26.

**Řešení příkladu 92.** Každý druh aspoň dvakrát – dáme předem. Doplňujeme šest míst, přičemž trubiček a marokánek můžeme vzít 0 až 6, ale košíček pouze žádný nebo jeden ⇒ hledáme koeficient u $x^6$ v polynomu

$$(1 + x + \ldots + x^6) \cdot (1 + x + \ldots + x^6) \cdot (1 + x).$$

Vyjde 13.

**Řešení příkladu 93.** Polynom

$$
\begin{aligned}
(1+x+\ldots+x^{25})(1+x+\ldots+x^{40})(1+x+\ldots+x^{50})(1+x+\ldots+x^{75}) &= \\
= \frac{(1-x^{26})(1-x^{41})(1-x^{51})(1-x^{76})}{(1-x)^4} \\
= \left[\binom{3}{3}+\binom{4}{3}x+\binom{5}{4}x^2+\cdots\right](1-x^{26})(1-x^{41})(1-x^{51})(1-x^{76})
\end{aligned}
$$

Koeficient u $x^1$ je $4$, u $x^{90}$ je $55\ 301$. Letadlo nebylo vloženo, tedy nelze vytáhnout stejně jako např. 1 000 koulí.

**Řešení příkladu 94.**

$$\frac{1+2x^3}{4x^6(1-2x^3)^3}-\frac{1+8x^3}{4x^6}$$

**Řešení příkladu 95.**

$$\frac{1-x^2+2x^3-2x^5}{4x^6(1-2x^3)^3}+\frac{8x^5-8x^3+x^2-1}{4x^6}+\frac{x}{1-x^3}$$

**Řešení příkladu 96.**

$$\frac{\sin 2x+\cos 2x-1}{2x}$$

**Řešení příkladu 97.** Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,\lambda)=2x^2+4y^2-\lambda(x^2+y^2-9)$$

a derivujeme ji podle všech proměnných. Tyto parciální derivace položíme rovny nule a řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$
\begin{aligned}
x(4-2\lambda)&=0,\\
y(8-2\lambda)&=0,\\
x^2+y^2&=9.
\end{aligned}
$$

Dostaneme $4$ stacionární body $[0,\pm 3],[\pm 3,0]$ a k nim příslušné hodnoty $\lambda$ (postupně $4,2$). Zda v nich nastává extrém zjistíme z definitnosti formy dané

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy}\\ L_{yx} & L_{yy}\end{pmatrix}.$$

Tj., pokud je výraz

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy}\\ L_{yx} & L_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

kladný pro všechna $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\neq(0,0)$, pak je pozitivně definitní, pokud záporný, pak je negativně definitní a pokud najdeme dva vektory takové, že je daný výraz pro jeden kladný a pro druhý záporný, pak je indefinitní. $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ ovšem bereme jen z tečného prostoru dané množiny, tedy takové, jež splňují podmínku

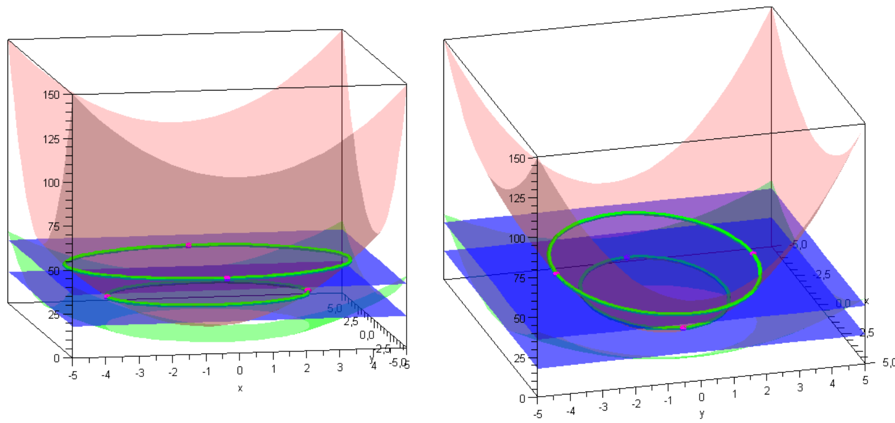
$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0.$$

Dosazením bodu $[0,3]$ do této podmínky dostaneme, že $\mathrm{d}y=0$, tedy $\mathrm{d}x$ musí být od nuly různé. Vyšetřovaný výraz je tedy (pro tento bod $\lambda=4$)

$$-4(\mathrm{d}x)^2,$$

který je pro každé $\mathrm{d}x\neq 0$ záporný. Vyšetřovaná forma je tedy negativně definitní a v bodě $[0,3]$ je ostré lokální maximum.

Podobně zjistíme, že maximum nastává i v bodě $[0,-3]$ a v bodech $[\pm 3,0]$ má funkce minima. Na obrázku 41 jsou tyto budy označeny růžovými puntíky.

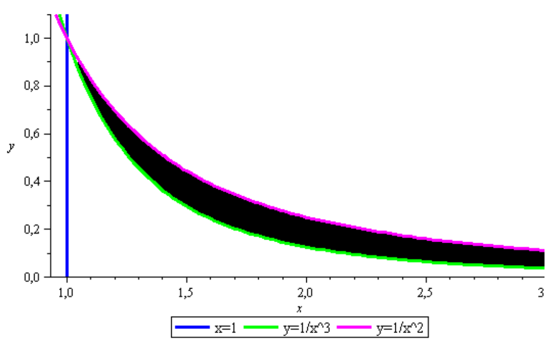


OBRÁZEK 41.

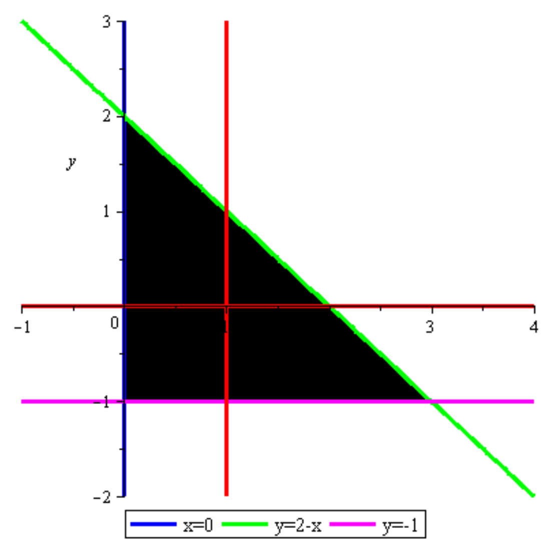
**Řešení příkladu 98.** Derivace zadané funkce je užitečné cvičení, příklad je ale chyták – není nutné nic počítat, protože daná množina je trojúhelník s vrcholy $[9,3]$, $[9,4]$, $[8,3]$, které jsou ’podezřelé’ automaticky.

**Řešení příkladu 99.** Viz obr. 42.

$$S = \int_{1}^{\infty} \int_{\frac{1}{x^3}}^{\frac{1}{x^2}} 1 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$




OBRÁZEK 42.




OBRÁZEK 43.

**Řešení příkladu 100.** Na obr. 43 je znázorněné rozdělení množiny podle toho, jak se projeví absolutní hodnota.

$$\int_{0}^{1} \int_{-1}^{0} xy - y \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \int_{0}^{2-x} xy - y \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \int_{0}^{2-x} y - xy \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \int_{1}^{2-y} y - xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{41}{24}.$$

**Řešení příkladu 101.** Množina viz obr. 44.

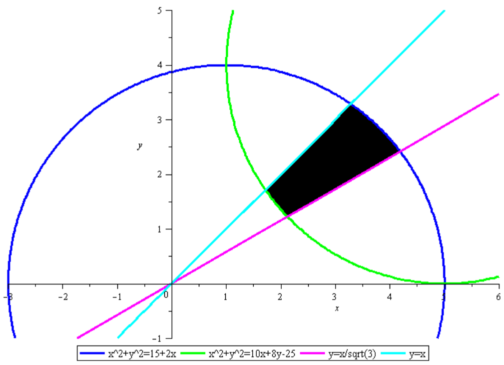
$$\varphi \in [\mathrm{arctg}\tfrac{\sqrt{3}}{3}, \mathrm{arctg}1] = [\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{4}].$$

Poloměr vypočteme z příslušných půlkružnic:

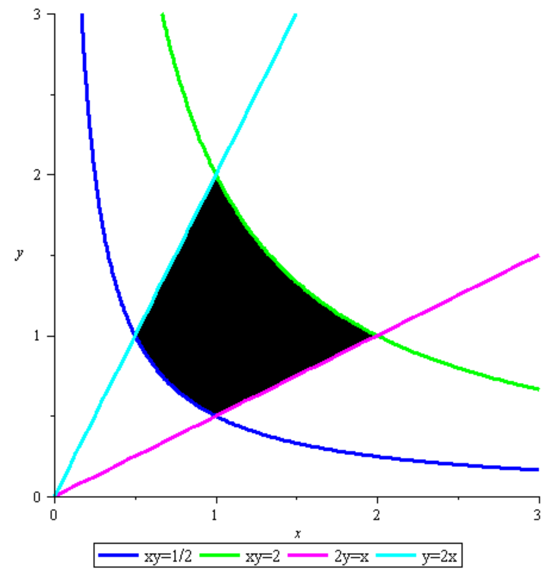
$$r \in [5\cos\varphi + 4\sin\varphi - \sqrt{(5\cos\varphi + 4\sin\varphi)^2 - 25}, \cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 15}].$$

Tedy

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_{5\cos\varphi+4\sin\varphi-\sqrt{(5\cos\varphi+4\sin\varphi)^2-25}}^{\cos\varphi+\sqrt{\cos^2\varphi+15}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$




OBRÁZEK 44.




OBRÁZEK 45.

**Řešení příkladu 102.** Množina viz obr. 45. Musíme rozdělit, např.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \int\limits_{\frac{1}{2x}}^{2x} x^2y^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} x^2y^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{63}{24}\ln 2.$$

**Řešení příkladu 103.** Množina viz obr. 45. Transformace

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}, \quad |J| = \frac{1}{2v},$$

meze (dosazením do zadání)

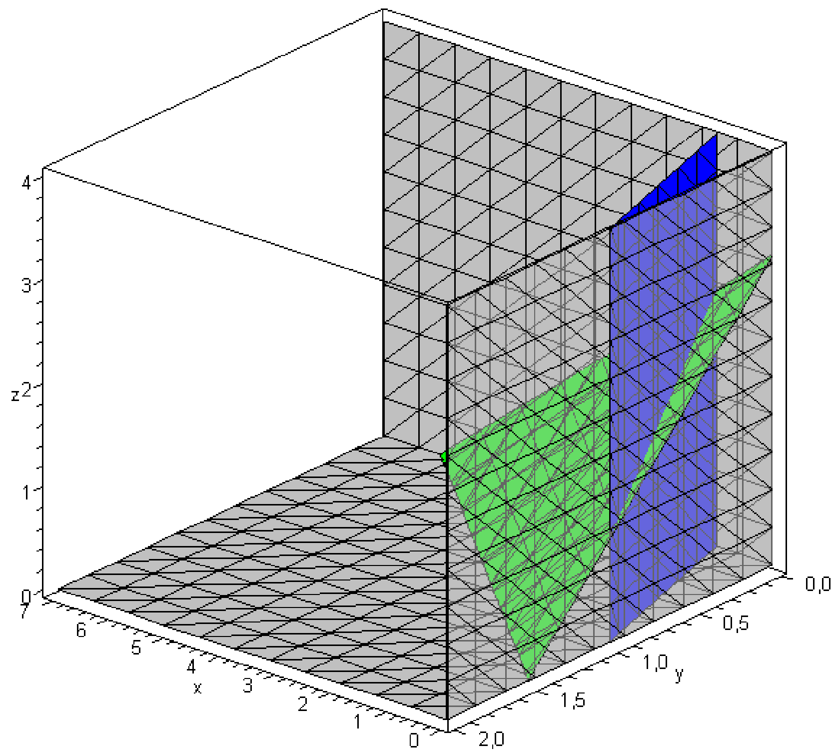
$$u \in [\tfrac{1}{2}, 2], \quad v \in [\tfrac{1}{2}, 2].$$

Tedy

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{u^2}{2v} \,\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \frac{63}{24}\ln 2.$$

**Řešení příkladu 104.** Množina viz obr. 46.

$$V = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1-x} \int\limits_{0}^{\frac{6-x-4y}{2}} 1 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{13}{12}.$$




OBRÁZEK 46.

**Řešení příkladu 105.** Množina viz obr. 47 a 48 (řezy souř. rovinami).

$$\int_0^2 \int_{x-2}^{2-x} \int_{\ln(x+2)}^{\ln(6-x)} 1 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 16 + 12\ln 3,$$

kde logaritmus krát polynom integrujeme per partes a výsledný lomenný výraz (po podělení) rozložíme na parciální zlomky.

**Řešení příkladu 106.** Množina viz obr. 49.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} \int_0^{1-x-y} 1 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{3\pi - 4\sqrt{2}}{24},$$

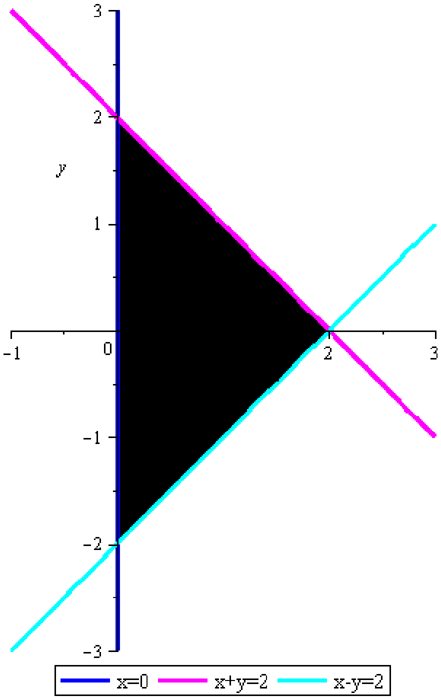
kde integrujeme tři sčítance - jeden přímo, druhý substitucí $t = \frac{1}{2} - x^2$ a poslední substitucí $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$.

**Řešení příkladu 107.** Množina viz obr. 49. Ihned ze zadání

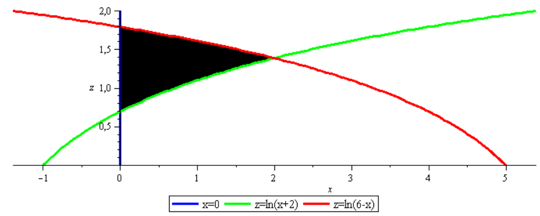
$$r \in [0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}], \quad \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad z \in [0, 1-x-y] = [0, 1 - r(\cos\varphi + \sin\varphi)].$$

Tedy

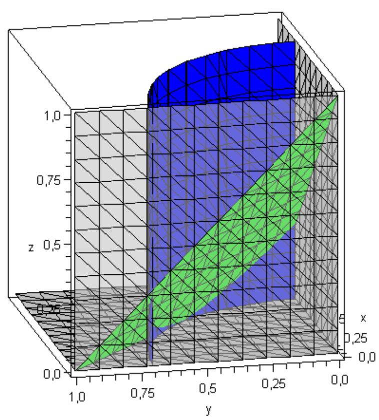
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\pi}2} \int_0^{1-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} r \,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{3\pi - 4\sqrt{2}}{24}.$$



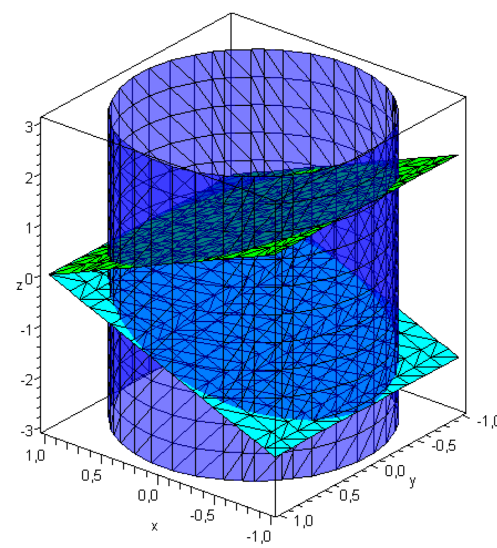

OBRÁZEK 47.




OBRÁZEK 48.



OBRÁZEK 49.



OBRÁZEK 50.

**Řešení příkladu 108.** Množina viz obr. 50.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x-1}^{1-x} x^2+y^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \pi.$$

Užijeme subst. $x=\sin t$ a vzorece pro gon. funkce. (Trans. do pol. souř. je to mnohem jednodušší.)

**Řešení příkladu 109.** Množina viz obr. 50. Ihned ze zadání

$$r\in[0,1],\quad \varphi\in[0,2\pi],\quad [r\cos\varphi-1, 1-r\cos\varphi],$$

tedy

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r\cos\varphi-1}^{1-r\cos\varphi} r^3 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \pi.$$

## Reference

[1] Došlá, Zuzana – Došlý, Ondřej. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Brno: MU, 1999.
[2] Holoubek, Josef. *Ekonomicko-matematické metody.* Brno: MZLU, 2006.
[3] Klingerová, Petra. *Lineární programování.* Diplomová práce. TU Liberec. 1997.
[4] Kalus, René – Hřivňák, Daniel. *Breviář vyšší matematiky.* Ostrava: OU, 2001.
[5] Ústav matematiky FSI VUT, Brno. *Matematika online - Matematika II.*
[6] Panák, Martin – Slovák, Jan. *Drsná matematika.* Učební text. Brno: MU.
[7] Balakrishnan, V. K. *Schaum's outline of theory and problems of graph theory.* McGraw-Hill, 1997.
[8] Stránky věnované grafům - *První*, *Druhé*.