PŘÍKLAD 1. Zapište obě možnosti pořadí integrace funkce $f(x, y)$ na množině ohraničené osou y, grafem funkce $y = \mathrm{e}^x$ a přímkou procházející body $[1, \mathrm{e}], [0, 2\mathrm{e}]$.

PŘÍKLAD 2. Pomocí trojného integrálu odvoďte známý vzorec pro objem koule.
[Návod: Uvažujte kouli o poloměru R se středem v počátku a využijte transformace do sférických souřadnic.]

PŘÍKLAD 3. Určete hmotnost tělesa, které je průnikem koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ a válce $x^2 + y^2 \leq 1$ v poloprostoru $z \geq 0$ a jehož hustota je v bodě $[x, y, z]$ rovna kolmé vzdálenosti tohoto bodu od roviny xy.

PŘÍKLAD 4. Pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s uzly $0, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ odhadněte hodnotu integrálu

$$\int_0^1 \sin(\pi x^2)\ \mathrm{d}x.$$

PŘÍKLAD 5. Vypočtěte integrál

$$\int_{\frac{3}{\sqrt{2}}}^{3} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

[Návod: Použijte transformaci do polárních souřadnic.]

ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 1. *Ihned z obrázku:*

$$\int_0^1 \int_{\mathrm{e}^x}^{2\mathrm{e}-\mathrm{e}x} f(x,y)\;\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \int_0^{\ln y} f(x,y)\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} \int_0^{2-\frac{y}{\mathrm{e}}} f(x,y)\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 2. $r \in [0,R], \varphi \in [0,2\pi], \theta \in [0,\pi], V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 3. *Transformací do cylindrických souřadnic (a integrací polynomu)* $= \frac{7}{4}\pi$.

ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 4. $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \approx 0.47$

ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 5. *Těžší příklad – v mezích je závislost a použití substituce* $t = \sin\varphi$ *vede na (jednoduché) parciální zlomky. Celkem* $= \frac{3}{4}\pi - \frac{3\sqrt{2}}{4}\ln(3+2\sqrt{2})$.