# Matematika III – 1. přednáška
# Funkce více proměnných: křivky, směrové derivace

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

18. 9. 2007

# Obsah přednášky


1. Literatura
2. Zobrazení a funkce více proměnných
   - Funkce více proměnných
   - Topologie euklidovských prostorů
   - Křivky v euklidovských prostorech
   - Limita a spojitost funkce
3. Parciální a směrové derivace
   - Parciální derivace
   - Směrové derivace

# Plán přednášky

1. Literatura
2. Zobrazení a funkce více proměnných
   - Funkce více proměnných
   - Topologie euklidovských prostorů
   - Křivky v euklidovských prostorech
   - Limita a spojitost funkce
3. Parciální a směrové derivace
   - Parciální derivace
   - Směrové derivace

# Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

# Doporučené zdroje


- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.

# Doporučené zdroje


- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).

# Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

# Plán přednášky

1. Literatura
2. Zobrazení a funkce více proměnných
   - Funkce více proměnných
   - Topologie euklidovských prostorů
   - Křivky v euklidovských prostorech
   - Limita a spojitost funkce
3. Parciální a směrové derivace
   - Parciální derivace
   - Směrové derivace

V diferenciálním a integrálním počtu funkcí jedné proměnné jsme se (jak už název napovídá) zabývali zobrazeními

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Přirozeně se nabízí otázka, jak příslušné pojmy zobecnit pro případ zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Začneme dvěma speciálními případy:

- n=1 – funkce více proměnných
- m=1 – křivka v prostoru $\mathbb{R}^n$

## Definice

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálná funkce více proměnných* (ty obvykle značíme $x_1, \ldots, x_n$). Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena $x, y, z$. To znamená, že funkce $f$ definované v „prostoru“ $E_n = \mathbb{R}^n$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

a např. funkce $f$ definované v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

## Definice

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálná funkce více proměnných* (ty obvykle značíme $x_1, \ldots, x_n$). Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena $x, y, z$. To znamená, že funkce $f$ definované v „prostoru“ $E_n = \mathbb{R}^n$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

a např. funkce $f$ definované v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována. (Častým úkolem - nejen - v písemkách bývá nalézt k dané formuli pro funkci co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

# Definiční obor funkce

## Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

# Definiční obor funkce

## Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

## Řešení

Funkce arccos připouští argument pouze z intervalu $[-1,1]$, odmocnina připouští pouze nezáporný argument. Definičním oborem je tedy množina bodů $(x,y)$ vyznačená na obrázku.

# Definiční obor funkce

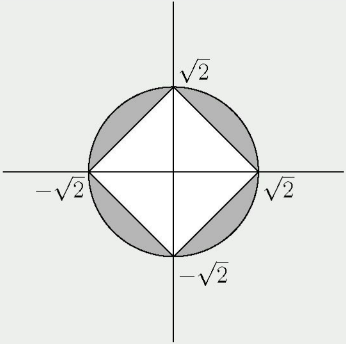
## Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos(x^2+y^2-1) + \sqrt{|x|+|y|-\sqrt{2}}.$$

## Řešení

Funkce arccos připouští argument pouze z intervalu $[-1,1]$, odmocnina připouští pouze nezáporný argument. Definičním oborem je tedy množina bodů $(x,y)$ vyznačená na obrázku.



## Definice

Grafem funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ splňující

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n));\ (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

kde $A$ je definiční obor funkce $f$.

## Definice

Grafem funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ splňující

$$G_f = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n));\ (x_1, \ldots, x_n) \in A\},$$

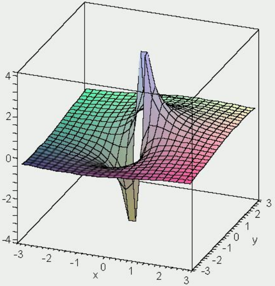
kde $A$ je definiční obor funkce $f$.

## Příklad

Grafem funkce definované v $E_2$

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku, maximálním definičním oborem je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



# Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

# Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

## Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = (x, y) \in R^2 : f(x, y) = c$$

nazýváme *vrstevnice funkce f na úrovni c*.

# Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

**Definice**

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = (x, y) \in R^2 : f(x, y) = c$$

nazýváme *vrstevnice funkce f na úrovni c.*

Zřejmě jde v případě vrstevnice na úrovni $c$ o přímou analogii řezu grafu funkce $f$ rovinou $z = c$. Pro představu o grafu funkce dvou proměnných jsou samozřejmě užitečné rovněž řezy rovinami $x = 0$ (*bokorys*), $y = 0$ (*nárys*), $z = 0$ (*půdorys*).

**Příklad**

Pomocí vrstevnic a řezů určete graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**Příklad**

Pomocí vrstevnic a řezů určete graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**Řešení**

Viz ilustrace v programu Maple.

# Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor $E_n$ je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru $E_n$ přičítat.

# Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor $E_n$ je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru $E_n$ přičítat.
Navíc je na $\mathbb{R}^n$ definován standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.

# Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor $E_n$ je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru $E_n$ přičítat.
Navíc je na $\mathbb{R}^n$ definován standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.
Proto je na $E_n$ dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|Q - P\|$ dvojic bodů $P$, $Q$ předpisem

$$\|Q - P\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

kde $u$ je vektor, jehož přičtením k $P$ obdržíme $Q$. Např. v $E_2$ je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_2 - P_1\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

# Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor $E_n$ je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru $E_n$ přičítat.
Navíc je na $\mathbb{R}^n$ definován standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.
Proto je na $E_n$ dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|Q - P\|$ dvojic bodů $P$, $Q$ předpisem

$$\|Q - P\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

kde $u$ je vektor, jehož přičtením k $P$ obdržíme $Q$. Např. v $E_2$ je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_2 - P_1\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.
Trojúhelníková nerovnost pro každé tři body $P$, $Q$, $R$

$$\|R - P\| = \|(Q - P) + (R - Q)\| \le \|(Q - P)\| + \|(R - Q)\|.$$

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body $P_i$ libovolného Euklidovského $E_n$:

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body $P_i$ libovolného Euklidovského $E_n$:

**Definice**

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot $i, j$ (nebo taky $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$ pro všechna $i, j > N$ a vhodné $N \in \mathbb{N}$) ,

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body $P_i$ libovolného Euklidovského $E_n$:

## Definice

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot $i, j$ (nebo taky $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$ pro všechna $i, j > N$ a vhodné $N \in \mathbb{N}$) ,
- *konvergentní posloupnost* – $\|P_i - P\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot $i, j$, bod $P$ pak nazýváme *limitou* posloupnosti $P_i$,

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body $P_i$ libovolného Euklidovského $E_n$:

**Definice**

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot $i, j$ (nebo taky $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$ pro všechna $i, j > N$ a vhodné $N \in \mathbb{N}$) ,
- *konvergentní posloupnost* – $\|P_i - P\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot $i, j$, bod $P$ pak nazýváme *limitou* posloupnosti $P_i$,
- *hromadný bod $P$ množiny $A \subset E_n$* – existuje posloupnost bodů v $A$ konvergující k $P$ a vesměs různých od $P$,

## Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,

## Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,

## Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené $\delta$–okolí bodu $P$* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,

### Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené $\delta$–okolí bodu $P$* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod $P$ množiny $A$* – každé $\delta$–okolí bodu $P$ má neprázdný průnik s $A$ i s komplementem $E_n \setminus A$,

Pozn: pozor na kvantifikátory!

## Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené $\delta$–okolí bodu $P$* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod $P$ množiny $A$* – každé $\delta$–okolí bodu $P$ má neprázdný průnik s $A$ i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod $P$ množiny $A$* – existuje $\delta$–okolí bodu $P$, které celé leží uvnitř $A$,

Pozn: pozor na kvantifikátory!

## Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené $\delta$–okolí bodu $P$* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod $P$ množiny $A$* – každé $\delta$–okolí bodu $P$ má neprázdný průnik s $A$ i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod $P$ množiny $A$* – existuje $\delta$–okolí bodu $P$, které celé leží uvnitř $A$,
- *ohraničená množina* – leží celá v nějakém $\delta$–okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké $\delta$),

Pozn: pozor na kvantifikátory!

## Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené $\delta$–okolí bodu $P$* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod $P$ množiny $A$* – každé $\delta$–okolí bodu $P$ má neprázdný průnik s $A$ i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod $P$ množiny $A$* – existuje $\delta$–okolí bodu $P$, které celé leží uvnitř $A$,
- *ohraničená množina* – leží celá v nějakém $\delta$–okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké $\delta$),
- *kompaktní množina* – uzavřená a ohraničená množina.

Pozn: pozor na kvantifikátory!

### Věta

*Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:*

1. *$A$ je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému $\delta$–okolí,*

## Věta

*Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:*

1. *$A$ je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému $\delta$–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*

## Věta

*Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:*

1. *$A$ je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému $\delta$–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem $A$,*

## Věta

*Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:*

1. *$A$ je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému $\delta$–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem $A$,*
4. *$A$ je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v $A$,*

## Věta

*Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:*

1. *$A$ je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému $\delta$–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem $A$,*
4. *$A$ je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v $A$,*
5. *$A$ je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné podpokrytí,*

### Věta

1. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřené, je otevřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.

## Věta

1. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřené, je otevřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.
2. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *uzavřené, je uzavřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.

## Věta

1. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřené, je otevřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.
2. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *uzavřené, je uzavřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.
3. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompaktní, je kompaktní i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.

# Křivky

Už na příkladu s vrstevnicemi jsme viděli příklad „prostorových" křivek.

**Definice**

*Křivka* je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

# Křivky

Už na příkladu s vrstevnicemi jsme viděli příklad „prostorových" křivek.

**Definice**

*Křivka* je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Je třeba rozlišovat křivku a její obraz v $E_n$:

**Příklad**

Obrazem křivky $t \mapsto (\cos(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}$ v rovině $E_2$ je jednotková kružnice, stejně jako v případě **jiné** křivky $t \mapsto (\cos(t^3), \sin(t^3)), t \in \mathbb{R}$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

**Definice**

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých $n$ souřadných složkách.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

**Definice**

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{(c(t) - c(t_0))}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých $n$ souřadných složkách.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

**Definice**

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{(c(t) - c(t_0))}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál:* $\int_a^b c(t) dt \in \mathbb{R}^n$.

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých $n$ souřadných složkách.

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a primitivní funkce (= antiderivace) pro křivky:

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a primitivní funkce (= antiderivace) pro křivky:

**Věta**

*Je-li $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ křivka spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje její Riemannův integrál $\int_a^b c(t)dt$. Navíc je křivka*

$$C(t) = \int_a^t c(s)ds \in \mathbb{R}^n$$

*dobře definovaná, diferencovatelná a platí $C'(t) = c(t)$ pro všechny hodnoty $t \in [a, b]$.*

## Poznámka

Ne vše funguje tak jako u funkcí jedné proměnné:

## Poznámka

Ne vše funguje tak jako u funkcí jedné proměnné:
Věta o střední hodnotě dává pro křivku $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ existenci čísel $t_i$ takových, že

$$c_i(b) - c_i(a) = (b - a) \cdot c_i'(t_i).$$

Tato čísla ale budou obecně různá, nemůžeme proto vyjádřit rozdílový vektor koncových bodů $c(b) - c(a)$ jako násobek derivace křivky v jediném bodě.

## Poznámka

Ne vše funguje tak jako u funkcí jedné proměnné:
Věta o střední hodnotě dává pro křivku $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ existenci čísel $t_i$ takových, že

$$c_i(b) - c_i(a) = (b - a) \cdot c_i'(t_i).$$

Tato čísla ale budou obecně různá, nemůžeme proto vyjádřit rozdílový vektor koncových bodů $c(b) - c(a)$ jako násobek derivace křivky v jediném bodě.

Např. v rovině $E_2$ pro $c(t) = (x(t), y(t))$ takto dostáváme

$$c(b) - c(a) = (x'(\xi)(b - a), y'(\eta)(b - a)) = (b - a) \cdot (x'(\xi), y'(\eta))$$

pro dvě (obecně různé) hodnoty $\xi, \eta \in [a, b]$.

# Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.

# Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T: \; c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* $c$ v bodě $t_0$, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky $c$.

# Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T: \; c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce $c$* v bodě $t_0$, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky $c$.
V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

## Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2), t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.

# Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T: \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* $c$ v bodě $t_0$, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky $c$.
V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

## Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2)$, $t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.
$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t)$, $c''(t) = (-\cos t, 0, 2)$,

# Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T : \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* $c$ v bodě $t_0$, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky $c$.
V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

## Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2), t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.
$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t)$, $c''(t) = (-\cos t, 0, 2)$,
$c'(0) = (0, 1, 0)$, $\|c'(0)\| = 1$, $c''(0) = (-1, 0, 2)$.

# Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.

Přímka zadaná parametricky $T: \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* $c$ v bodě $t_0$, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky $c$.

V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

## Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2)$, $t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.

$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t)$, $c''(t) = (-\cos t, 0, 2)$,

$c'(0) = (0, 1, 0)$, $\|c'(0)\| = 1$, $c''(0) = (-1, 0, 2)$.

Zrychlení ve směru tečny je pak $\frac{1}{\|c'(0)\|}(c'(0) \cdot c''(0))$.

# Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

# Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

**Definice**

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu $L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu $L$ existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu $a$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.
Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

# Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

## Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu $L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu $L$ existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu $a$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Obdobně jde (při vhodné definici okolí) limitu definovat i v „nevlastních" bodech (kterých je pro $n \geq 1$ již $2^n$).

# Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

**Definice**

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu $L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu $L$ existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu $a$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.
Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Obdobně jde (při vhodné definici okolí) limitu definovat i v „nevlastních" bodech (kterých je pro $n \geq 1$ již $2^n$).
Má-li mít funkce v daném bodě limitu, nesmí záležet na „cestě", po které k danému bodu konvergujeme (analogie limit zleva a zprava u funkcí jedné proměnné).

# Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

## Věta

- *jednoznačnost limity,*

---

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

# Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

## Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a],

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

# Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

**Věta**

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a]*,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x \to a}(c \cdot f(x) + d \cdot g(x)) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) + d \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

# Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

## Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a],
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)+d\cdot g(x)) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x) + d\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

- *multiplikativita, divisibilita,*

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

# Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

## Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a]*,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x\longrightarrow a}(c\cdot f(x)+d\cdot g(x))=c\cdot\lim_{x\longrightarrow a}f(x)+d\cdot\lim_{x\longrightarrow a}g(x),$$

- *multiplikativita, divisibilita,*
- *je-li* $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)=0$ *a funkce* $g(x)$ *je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu* $x$*, pak*

$$\lim_{x\longrightarrow a}f(x)g(x)=0.$$

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

## Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0,0)$.

**Příklad**

Vypočtěte limitu funkce $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0, 0)$.

**Příklad**

Vypočtěte limitu funkce $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ v bodě $(0, 0)$.

### Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0,0)$.

### Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bodě $(0,0)$.

### Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $(0,0)$.

# Spojitost funkce

## Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v $a$ vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

# Spojitost funkce

## Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v $a$ vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

## Věta (Weierstrassova)

*Spojitá funkce na kompaktní množině zde nabývá maxima i minima.*

# Spojitost funkce

## Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v $a$ vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

## Věta (Weierstrassova)

*Spojitá funkce na kompaktní množině zde nabývá maxima i minima.*

## Věta (Bolzanova)

*Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na otevřené* **souvislé** *množině $A$. Jsou-li $a, b \in A$ takové, že $f(a) < 0 < f(b)$, pak existuje $c \in A$ tak, že $f(c) = 0$.*

# Plán přednášky

1. Literatura
2. Zobrazení a funkce více proměnných
   - Funkce více proměnných
   - Topologie euklidovských prostorů
   - Křivky v euklidovských prostorech
   - Limita a spojitost funkce
3. Parciální a směrové derivace
   - Parciální derivace
   - Směrové derivace

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné $x_i$ a ostatní považujeme za konstatní.

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné $x_i$ a ostatní považujeme za konstatní.

## Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left( f(x_i^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) - f(x_1^*, \ldots, x_n^*) \right),$$

říkáme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ parciální derivaci podle proměnné $x_i$ a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$).

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné $x_i$ a ostatní považujeme za konstatní.

## Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_i^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) - f(x_1^*, \ldots, x_n^*)\right),$$

říkáme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ parciální derivaci podle proměnné $x_i$ a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$).

Podobně jako v případě jedné proměnné, pokud má funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ parciální derivace ve všech bodech nějaké otevřené množiny, jsou tyto derivace rovněž funkcemi z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$.

Pro funkce v $E_2$ dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)) = \\ = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)) = \\ = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Pro funkce v $E_2$ dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)) = $$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)) = $$
$$= \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

**Poznámka**

Parciální derivace funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ podle $x$ v bodě $(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ke křivce, která je průsečíkem grafu $G_f$ s rovinou $y = y_0$.

# Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

**Poznámka**

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

# Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

## Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

## Příklad

Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } \mathrm{x{=}0} \textit{ nebo } \mathrm{y{=}0} \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $(0,0)$ obě parciální derivace nulové, přitom v tomto bodě neexistuje limita, a tedy není ani spojitá.

# Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

# Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

## Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)),$$

často značíme rovněž $f_v(x)$.

# Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

## Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)),$$

často značíme rovněž $f_v(x)$.

Speciální volbou jednotkových vektorů ve směru souřadných os dostáváme právě *parciální derivace funkce* $f$.

Směrové derivace jsou definovány pomocí derivací jedné proměnné, proto tam platí obvyklá pravidla pro derivování.

**Věta**

*Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:*

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,

Směrové derivace jsou definovány pomocí derivací jedné proměnné, proto tam platí obvyklá pravidla pro derivování.

**Věta**

*Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:*

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,

Směrové derivace jsou definovány pomocí derivací jedné proměnné, proto tam platí obvyklá pravidla pro derivování.

**Věta**

*Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:*

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) \cdot f(x) d_v g(x)$,

Směrové derivace jsou definovány pomocí derivací jedné proměnné, proto tam platí obvyklá pravidla pro derivování.

**Věta**

*Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:*

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) \cdot f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Směrové derivace jsou definovány pomocí derivací jedné proměnné, proto tam platí obvyklá pravidla pro derivování.

**Věta**

*Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:*

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) \cdot f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Směrové derivace jsou definovány pomocí derivací jedné proměnné, proto tam platí obvyklá pravidla pro derivování.

## Věta

*Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:*

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) \cdot f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

## Poznámka

Neplatí ale aditivita vzhledem ke směrům:
$d_{u+v} f(x) \neq d_u f(x) + d_v f(x)$

# Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

**Příklad**

Funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$$

mimo počátek a $f(0, 0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá.

# Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

## Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$$

mimo počátek a $f(0, 0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá.

Ke spojitosti potřebujeme silnější pojem, tzv. *totální diferenciál*, který si zavedeme příště.