

Matematika III – 14. přednáška

Aplikace vytvořujících funkcí – další úlohy

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

18. 12. 2007

Obsah přednášky

- 1 Řešení rekurencí
- 2 Exponenciální vytvořující funkce

Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž <http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.

Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž <http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.
- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.

Doporučené zdroje

- H. S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, druhé vydání, 1994 , (rovněž <http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>)
- R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, **Concrete Mathematics**, druhé vydání, Addison-Wesley, 1994.
- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.

Plán přednášky

- 1 Řešení rekurencí
- 2 Exponenciální vytvořující funkce

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkce n . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence. Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$).

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkce n . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence. Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$).
- 2 Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkce n . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence. Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$).
- 2 Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
- 3 Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí. Tím je míněno vyjádření členu a_n jako funkce n . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence. Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost a_n na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$).
- 2 Obě strany rovnice vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_n a_n x^n$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
- 3 Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
- 4 Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^n udává a_n , tj. $a_n = [x^n]A(x)$.

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, $c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, $c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).

Najdeme rekurzivní vztah – diskusí chování „na kraji“ zjistíme, že $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$, $r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$, $r_0 = 0$, $r_1 = 1$, kde r_n je počet pokrytí obdélníku $3 \times n$, ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

Řešení (pokr.)

Hodnoty c_n a r_n pro několik malých n jsou:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
c_n	1	0	3	0	11	0	41	0
r_n	0	1	0	4	0	15	0	56

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0]$, $r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0]$, $r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$.

- Krok 2:

$$C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x).$$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0]$, $r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$.

- Krok 2:

$$C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x).$$

- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \quad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0]$, $r_n = u_{n-1} + r_{n-2}$.

- Krok 2:

$$C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x).$$

- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \quad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

- Krok 4: Vidíme, že obě funkce jsou funkcemi x^2 , ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci $D(z) = 1/(1 - 4z + z^2)$, pak totiž $C(x) = (1 - x^2)D(x^2)$, tj.

$$[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1 - x^2)D(x^2) = [x^n](1 - x)D(x), \text{ a tedy}$$
$$c_{2n} = d_n - d_{n-1}.$$

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{3 - \sqrt{3}} + \frac{(2 - \sqrt{3})^n}{3 + \sqrt{3}}.$$

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{3 - \sqrt{3}} + \frac{(2 - \sqrt{3})^n}{3 + \sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká n zanedbatelný a pro všechna n leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lceil \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{3 - \sqrt{3}} \right\rceil.$$

Např. $c_{20} = 413403$.

Plán přednášky

- 1 Řešení rekurencí
- 2 Exponenciální vytvořující funkce

Exponenciální vytvořující funkce

Někdy mívá vytvořující funkce posloupnosti (a_n) komplikované vlastnosti, přičemž posloupnost $(a_n/n!)$ má vytvořující funkci daleko jednodušší. V takových případech raději pracujeme s tzv. **exponenciálními vytvořujícími funkcemi**

$$\widehat{A}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Jméno vychází z toho, že vytvořující funkcí *základní* posloupnosti $(1, 1, 1, 1, \dots)$ je e^x .

Exponenciální vytvořující funkce

Někdy mívá vytvořující funkce posloupnosti (a_n) komplikované vlastnosti, přičemž posloupnost $(a_n/n!)$ má vytvořující funkci daleko jednodušší. V takových případech raději pracujeme s tzv. **exponenciálními vytvořujícími funkcemi**

$$\widehat{A}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Jméno vychází z toho, že vytvořující funkcí *základní* posloupnosti $(1, 1, 1, 1, \dots)$ je e^x .

Zdůrazněme, že exponenciální vytvořující funkce se od obyčejných liší i standardními operacemi.

- Vynásobením x získáme funkci posloupnosti (na_{n-1}) .

- Vynásobením x získáme funkci posloupnosti (na_{n-1}) .
- Derivací získáme funkci odpovídající posunutí doleva.

- Vynásobením x získáme funkci posloupnosti (na_{n-1}) .
- Derivací získáme funkci odpovídající posunutí doleva.
- Integrací získáme funkci odpovídající posunutí doprava.

- Vynásobením x získáme funkci posloupnosti (na_{n-1}) .
- Derivací získáme funkci odpovídající posunutí doleva.
- Integrací získáme funkci odpovídající posunutí doprava.
- Součinem dvou funkcí $\widehat{F}(x)$ a $\widehat{G}(x)$ získáme funkci $\widehat{H}(x)$, která odpovídá posloupnosti $h_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k g_{n-k}$, tzv. *binomické konvoluci* f_n a g_n .

Příklad

Řešte rekurenci danou vztahy $g_0 = 0, g_1 = 1$ a předpisem

$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k}.$$

Řešení

Vzhledem k rekurentnímu vztahu, který obsahuje binomickou konvoluci posloupností, se zdá vhodné využít *exponenciálních vytvořujících funkcí*. Označme $\widehat{G}(x)$ příslušnou exponenciální mocninnou řadu. Budeme postupovat v obvyklých čtyřech krocích.

Příklad

Řešte rekurenci danou vztahy $g_0 = 0, g_1 = 1$ a předpisem

$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k}.$$

Řešení

Vzhledem k rekurentnímu vztahu, který obsahuje binomickou konvoluci posloupností, se zdá vhodné využít *exponenciálních vytvořujících funkcí*. Označme $\widehat{G}(x)$ příslušnou exponenciální mocninovou řadu. Budeme postupovat v obvyklých čtyřech krocích.

- Krok 1: $g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k} + [n = 1]$.

Příklad

Řešte rekurenci danou vztahy $g_0 = 0, g_1 = 1$ a předpisem

$$g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k}.$$

Řešení

Vzhledem k rekurentnímu vztahu, který obsahuje binomickou konvoluci posloupností, se zdá vhodné využít *exponenciálních vytvořujících funkcí*. Označme $\widehat{G}(x)$ příslušnou exponenciální mocninnou řadu. Budeme postupovat v obvyklých čtyřech krocích.

- Krok 1: $g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} g_k g_{n-k} + [n = 1]$.
- Krok 2: $\widehat{G}(x) = -2x\widehat{G}(x) + \widehat{G}(x)^2 + x$.

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím vztahů

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím vztahů

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím vztahů

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

a

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím vztahů

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

a

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1}{2k} \cdot \binom{-1/2}{k-1}$$

postupně dostaneme

Řešení (pokr.)

- Krok 3: Řešením kvadratické rovnice dostaneme $\widehat{G}(x) = 1/2(1 + 2x \pm \sqrt{1 + 4x^2})$. Dosazením $x = 0$ vidíme, že odpovídá znaménko $-$, proto je řešením funkce

$$\widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}.$$

- Krok 4: Pomocí zobecněné binomické věty rozvineme $\widehat{G}(x)$ do mocninné řady. S využitím vztahů

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

a

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1}{2k} \cdot \binom{-1/2}{k-1}$$

postupně dostaneme

Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Odtud, protože

$$\sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} = \widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2},$$

máme $g_{2k+1} = 0$

Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Odtud, protože

$$\sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} = \widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2},$$

máme $g_{2k+1} = 0$ a

$$g_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \cdot (2k)! =$$

Řešení (dokončení)

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot x^{2k}.$$

Odtud, protože

$$\sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!} = \widehat{G}(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x^2}}{2},$$

máme $g_{2k+1} = 0$ a

$$g_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \cdot (2k)! = (-1)^k \cdot (2k)! \cdot C_{k-1},$$

kde C_n je n -té Catalanovo číslo.

Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Označme pro jednoduchost $t_n = \kappa(K_n)$. Již dříve jsme viděli, že $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = 3$. Lze rovněž snadno spočítat $t_4 = 16$.

Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Označme pro jednoduhost $t_n = \kappa(K_n)$. Již dříve jsme viděli, že $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = 3$. Lze rovněž snadno spočítat $t_4 = 16$.

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní.

Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Označme pro jednoduchost $t_n = \kappa(K_n)$. Již dříve jsme viděli, že $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 3$. Lze rovněž snadno spočítat $t_4 = 16$.

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní.

Pak pro $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_m} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

Cayleyho formule

Připomeňme, že jsme již dříve dokázali, že počet stromů na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek ještě jednou pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Označme pro jednoduchost $t_n = \kappa(K_n)$. Již dříve jsme viděli, že $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 3$. Lze rovněž snadno spočítat $t_4 = 16$.

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní.

Pak pro $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_m} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

Např. pro $n = 4$ máme $t_4 = 3t_3 + 6t_1t_2 + t_1^3$.

Ošklivě vypadající rekurenci zjednodušíme substitucí $u_n = nt_n$.
Dostáváme pro $n > 1$

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \dots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

a je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u x^{n-1} v m -té mocnině řady $\widehat{U}(x) = \sum u_n \frac{x^n}{n!}$.

Ošklivě vypadající rekurenci zjednodušíme substitucí $u_n = nt_n$.
Dostáváme pro $n > 1$

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \dots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

a je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u x^{n-1} v m -té mocnině řady $\widehat{U}(x) = \sum u_n \frac{x^n}{n!}$. Proto je

$$\frac{u_n}{n!} = [x^{n-1}] \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \widehat{U}(x)^m,$$

a tedy

$$\widehat{U}(x) = e^{x\widehat{U}(x)}.$$

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk + 1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk + 1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = e^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk + 1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = e^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.

Fakt: $\ln \mathcal{E}_t(x) = x \cdot \mathcal{E}_t(x)$, tj. spec. $\mathcal{E}(x) = e^{x\mathcal{E}(x)}$.

Srovnáním tohoto vztahu s výše uvedeným $\widehat{U}(x) = e^{x\widehat{U}(x)}$ vidíme, že $\widehat{U}(x) = x\mathcal{E}(x)$.

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk + 1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = e^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.

Fakt: $\ln \mathcal{E}_t(x) = x \cdot \mathcal{E}_t(x)$, tj. spec. $\mathcal{E}(x) = e^{x\mathcal{E}(x)}$.

Srovnáním tohoto vztahu s výše uvedeným $\widehat{U}(x) = e^{x\widehat{U}(x)}$ vidíme, že $\widehat{U}(x) = x\mathcal{E}(x)$.

Proto

$$t_n = \frac{u_n}{n} = \frac{n!}{n} [x^n] \widehat{U}(x) = (n-1)! [x^{n-1}] \mathcal{E}(x) = n^{n-2}.$$