Matematika III – 3. přednáška
Funkce více proměnných: lokální a absolutní extrémy, zobrazení mezi euklidovskými prostory

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

2. 9. 2007

Obsah přednášky

Plán přednášky

1. Literatura
2. Lokální a absolutní extrémy funkcí více proměnných
   - Lokální extrémy
   - Absolutní (globální) extrémy
3. Zobrazení mezi euklidovskými prostory
   - Zobrazení a transformace
   - „Chain Rule“
   - Věta o inverzním zobrazení
   - Implicitně zadaná zobrazení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

Plán přednášky

Definice

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí U takové, že pro všechny body $x \in U$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny $x \neq x^*$, hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.

Definice

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí U takové, že pro všechny body $x \in U$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny $x \neq x^*$, hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f, ve kterém je diferenciál $df(x)$ nulový nazýváme **stacionární bod funkce** f.

Definice

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí U takové, že pro všechny body $x \in U$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny $x \neq x^*$, hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f, ve kterém je diferenciál $df(x)$ nulový nazýváme **stacionární bod funkce** f.

Nutnou podmínkou pro existenci maxima nebo minima v bodě x^* (v případě diferencovatelnosti funkce f v x^*) **je vymizení diferenciálu v tomto bodě, tj.** $df(x^*) = 0$. Skutečně, pokud je $df(x^*) \neq 0$, pak existuje směr v, ve kterém je $d_v f(x^*) \neq 0$. Pak ovšem nutně je podél přímky $x^* + tv$ na jednu stranu od bodu x^* hodnota funkce roste a na druhou klesá.

Příklad

Funkce $f : E_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 1 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

má v počátku ostré lokální maximum (přitom zde není spojitá, a tedy ani diferencovatelná).

Příklad

Funkce $f : E_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 1 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

má v počátku ostré lokální maximum (přitom zde není spojitá, a tedy ani diferencovatelná).

Příklad

Funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je v počátku spojitá a má zde ostré lokální minimum, přestože v tomto bodě není diferencovatelná (grafem funkce je kuželová plocha – viz první přednáška).

Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.

Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.
Přitom ale (podobně jako u funkcí jedné proměnné) stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.
Např. funkce $f(x,y) = (x - x_0)(y - y_0)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ stacionární bod ($\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (y - y_0)dx + (x - x_0)dy$), nemá zde však zřejmě lokální extrém (jde o tzv. „sedlo“).

Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.
Přitom ale (podobně jako u funkcí jedné proměnné) stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.
Např. funkce $f(x, y) = (x - x_0)(y - y_0)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ stacionární bod ($\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (y - y_0)dx + (x - x_0)dy$), nemá zde však zřejmě lokální extrém (jde o tzv. „sedlo“).
Poznat, jakého typu je daný stacionární bod, nám stejně jako v případě funkcí jedné proměnné umožní (díky Taylorově větě) derivace vyšších řádů.

Situace v jedné proměnné

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x_0 (tj. $f'(x_0) = 0$).
Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce v x_0 ostré lokální maximum (analogicky neostré, resp. minimum).

Situace v jedné proměnné

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x_0 (tj. $f'(x_0) = 0$).
Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce v x_0 ostré lokální maximum (analogicky neostré, resp. minimum).
Toto tvrzení vyplynulo z Taylorovy věty (stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$
\begin{aligned}
f(x) = T_1(x) + R_1(x) = \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 = \\
&= f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2,
\end{aligned}
$$

kde ξ leží mezi x a x_0.

Situace v jedné proměnné

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x_0 (tj. $f'(x_0) = 0$). Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce v x_0 ostré lokální maximum (analogicky neostré, resp. minimum).
Toto tvrzení vyplynulo z Taylorovy věty (stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 = \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2, \end{aligned}$$

kde ξ leží mezi x a x_0. Ze spojitosti f'' a vlastnosti $f''(x_0) < 0$ pak pro ξ dostatečně blízko x_0 dostáváme $f''(\xi) < 0$ a tedy $R_1(x) < 0$ dostatečně blízko x_0 . Proto zde $f(x) < f(x_0)$ a x_0 je lokálním maximem.

Situace ve více proměnných

Mějme funkci $f : E_n \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x^* (tj. $f'(x^*) = \mathbf{0}$ – nulový vektor parciálních derivací).

Situace ve více proměnných

Mějme funkci $f : E_n \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x^* (tj. $f'(x^*) = \mathbf{0}$ – nulový vektor parciálních derivací).
Z Taylorovy věty pak dostáváme (opět stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) = T_1(x) + R_1(x) &= \\ &= f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*) = \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*), \end{aligned}$$

kde $\xi = x^* + \theta v$ (pro $\theta \in (0, 1)$) leží „mezi“ x a x^*.

Situace ve více proměnných

Mějme funkci $f : E_n \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x^* (tj. $f'(x^*) = \mathbf{0}$ – nulový vektor parciálních derivací).
Z Taylorovy věty pak dostáváme (opět stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) = T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*) = \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*), \end{aligned}$$

kde $\xi = x^* + \theta v$ (pro $\theta \in (0, 1)$) leží „mezi“ x a x^*.
Zbývá do více proměnných „přeložit“ podmínku, která říká, že výraz

$$\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*) = (x - x^*)^T Hf(\xi)(x - x^*)$$

je nekladný (resp. nezáporný) pro libovolné x.

Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

Definice

Kvadratická forma $h : E_n \to \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní**, je-li $h(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li $h(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li $h(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li $h(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- **indefinitní**, je-li $h(u) > 0$ a $h(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

Definice

Kvadratická forma $h : E_n \to \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní**, je-li $h(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li $h(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li $h(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li $h(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- **indefinitní**, je-li $h(u) > 0$ a $h(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Často rovněž hovoříme o definitnosti matice A kvadratické formy h (jsou spolu ve vztahu $h(u) = u^T A u = Au \cdot u$).

Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

Definice

Kvadratická forma $h : E_n \to \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní**, je-li $h(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li $h(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li $h(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li $h(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- **indefinitní**, je-li $h(u) > 0$ a $h(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Často rovněž hovoříme o definitnosti matice A kvadratické formy h (jsou spolu ve vztahu $h(u) = u^T Au = Au \cdot u$).

S těmito pojmy jste se setkali již v části věnované lineárním modelům a měli byste tedy umět rozeznat definitnost kvadratické formy (resp. její matice v dané bázi).

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice A je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice A je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A jsou záporné,

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice A je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A jsou záporné,
- hlavní minory A střídají znaménko, počínaje záporným.

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a $x^* \in E_n$ nechť je stacionární bod funkce f. Potom

1. *je-li $Hf(x^*)$ positivně (negativně) definitní, má f v x^* ostré lokální minimum (maximum),*
2. *je-li $Hf(x^*)$ indefinitní, nemá f v bodě x^* lokální extrém.*
3. *má-li f v x^* lokální minimum (maximum), je $Hf(x^*)$ pozitivně (negativně) semidefinitní,*

Věta

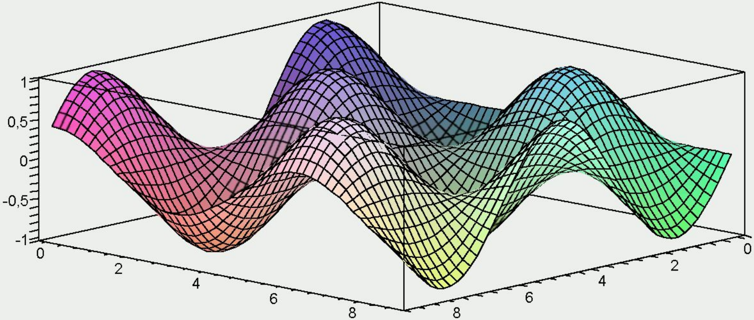
Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a $x^* \in E_n$ nechť je stacionární bod funkce f. Potom

1. *je-li $Hf(x^*)$ positivně (negativně) definitní, má f v x^* ostré lokální minimum (maximum),*
2. *je-li $Hf(x^*)$ indefinitní, nemá f v bodě x^* lokální extrém.*
3. *má-li f v x^* lokální minimum (maximum), je $Hf(x^*)$ pozitivně (negativně) semidefinitní,*

Všimněme si, že věta nedává žádný výsledek, pokud je hessián funkce ve zkoumaném bodě degenerovaný (nulový). Důvod je opět stejný jako u funkcí jedné proměnné. V takových případech totiž existují směry, ve kterých první i druhá derivace zmizí a my proto v tomto řádu přiblížení neumíme poznat, zda se funkce bude chovat jako t^3 nebo jako $\pm t^4$ dokud nespočteme alespoň v potřebných směrech derivace vyšší.

Příklad

Uvažme funkci $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$, která připomíná známá kartonová plata na vajíčka a spočtěme její lokální extrémy.



Příklad (pokr.)

Spočtěme si nejprve první parciální derivace:

$$f_x(x,y) = \cos(x)\cos(y),\ f_y(x,y) = -\sin(x)\sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

1. $\cos(x) = 0$, $\sin(y) = 0$, to je $[x, y] = [\frac{2k+1}{2}\pi, \ell\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$
2. $\cos(y) = 0$, $\sin(x) = 0$, to je $[x, y] = [k\pi, \frac{2\ell+1}{2}\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Příklad (pokr.)

Spočtěme si nejprve první parciální derivace:

$$f_x(x, y) = \cos(x)\cos(y), \ f_y(x, y) = -\sin(x)\sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

1. $\cos(x) = 0$, $\sin(y) = 0$, to je $[x, y] = [\frac{2k+1}{2}\pi, \ell\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$
2. $\cos(y) = 0$, $\sin(x) = 0$, to je $[x, y] = [k\pi, \frac{2\ell+1}{2}\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Druhé parciální derivace jsou

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

1. $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou *různé* parity a naopak pro $-$,
2. $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou různé parity a naopak pro $-$.

Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

1. $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou *různé* parity a naopak pro $-$,
2. $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou různé parity a naopak pro $-$.

Protože naše funkce má spojitý hessián, který je nedegenerovaný, nastane lokální maximum tehdy a jen tehdy, když náš bod (x^*, y^*) patří do první skupiny se stejnými paritami k a ℓ. Když budou parity opačné, pak bod z první skupiny bude naopak bodem lokálního minima.

Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

1. $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou *různé* parity a naopak pro $-$,
2. $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou různé parity a naopak pro $-$.

Protože naše funkce má spojitý hessián, který je nedegenerovaný, nastane lokální maximum tehdy a jen tehdy, když náš bod (x^*, y^*) patří do první skupiny se stejnými paritami k a ℓ. Když budou parity opačné, pak bod z první skupiny bude naopak bodem lokálního minima. Naopak, hessián u druhé skupiny bodů se vyčíslí kladně na některých přírůstcích a záporně na jiných. Stejně se proto bude chovat i celá funkce f v okolí.

Příklad (Poznámky)

- matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je indefinitní, přestože má oba hlavní minory nekladné (pro semidefinitnost je znaménko minorů pouze nutnou podmínkou!)

Příklad (Poznámky)

- matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je indefinitní, přestože má oba hlavní minory nekladné (pro semidefinitnost je znaménko minorů pouze nutnou podmínkou!)
- nalezené lokální extrémy šlo jistě najít snadněji úvahou o nabývání hodnot ± 1 funkcí $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$, neměli bychom ale jistotu, že jde o **všechny** extrémy.

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a M je podmnožinou definičního oboru f.
V bodě x^* nabývá f absolutního (globálního) maxima (minima) na M, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a M je podmnožinou definičního oboru f. V bodě x^* nabývá f absolutního (globálního) maxima (minima) na M, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

Věta

Nechť $M \subseteq E_n$ je kompaktní množina, $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a M je podmnožinou definičního oboru f.
V bodě x^* nabývá f absolutního (globálního) maxima (minima) na M, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

Věta

Nechť $M \subseteq E_n$ je kompaktní množina, $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Hledání absolutních extrémů funkce na množině tak máme převedeno na nalezení lokálních extrémů (což umíme) a vyšetření hraničních bodů. To je ale často komplikovanější záležitost, které se budeme více věnovat později v části o *vázaných extrémech*.

Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině M, která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině M, která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

Řešení

Jediným stacionárním bodem je $[1, 1]$, kde nastává absolutní maximum $f(1, 1) = 1$. Absolutní minimum -12 nastává v hraničních bodech $[4, 0]$ a $[0, 4]$.

Plán přednášky

1. Literatura
2. Lokální a absolutní extrémy funkcí více proměnných
   - Lokální extrémy
   - Absolutní (globální) extrémy
3. Zobrazení mezi euklidovskými prostory
   - Zobrazení a transformace
   - „Chain Rule“
   - Věta o inverzním zobrazení
   - Implicitně zadaná zobrazení

Zobrazení $F : E_n \to E_m$ je při zvolených kartézských souřadnicích na obou stranách obyčejná m–tice

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

funkcí $f_i : E_n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *diferencovatelné* nebo *spojitě* **diferencovatelné zobrazení**, jestliže tuto vlastnost mají všechny funkce $f_1, \dots, f_m$.

Zobrazení $F : E_n \to E_m$ je při zvolených kartézských souřadnicích na obou stranách obyčejná m–tice

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

funkcí $f_i : E_n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *diferencovatelné* nebo *spojitě* **diferencovatelné zobrazení**, jestliže tuto vlastnost mají všechny funkce $f_1, \dots, f_m$.
Diferencovatelná zobrazení $F : E_n \to E_n$, která mají inverzní zobrazení $G : E_n \to E_n$ definované na celém svém obrazu, se nazývají **(diferencovatelné) transformace**.

Zobrazení $F : E_n \to E_m$ je při zvolených kartézských souřadnicích na obou stranách obyčejná m–tice

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

funkcí $f_i : E_n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *diferencovatelné* nebo *spojitě* **diferencovatelné zobrazení**, jestliže tuto vlastnost mají všechny funkce $f_1, \dots, f_m$.

Diferencovatelná zobrazení $F : E_n \to E_n$, která mají inverzní zobrazení $G : E_n \to E_n$ definované na celém svém obrazu, se nazývají **(diferencovatelné) transformace**. Příkladem transformace v E_2 je přechod mezi polárními a kartézkými souřadnicemi:

$$[r, \theta] \mapsto [r \cos \theta, r \sin \theta]$$

s inverzí

$$[x, y] \mapsto [\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x}], \; [0, y] \mapsto [y, \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y].$$

Lineární zobrazení $\mathrm{d}f_i(x) : E^n \to \mathbb{R}$ lineárně aproximují přírůstky f_i.

Definice

$$D^1F(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1(x) \\ \mathrm{d}f_2(x) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x)$$

se nazývá **Jacobiho matice zobrazení** F v bodě x. Lineární zobrazení $D^1F(x)$ definované na přírůstcích $v = (v_1, \dots, v_n)$ pomocí stejně značené Jacobiho matice nazýváme **diferenciál zobrazení** F v bodě x z definičního oboru, jestliže

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(F(x+v) - F(x) - D^1F(x)(v)\big) = \mathbf{0}.$$

Důsledek Věty o existenci diferenciálu pro funkce n proměnných je:

Věta

Nechť $F : E_n \to E_m$ je zobrazení, jehož všechny souřadné funkce mají spojité parciální derivace v okolí bodu $x \in E_n$. Pak existuje diferenciál $D^1F(x)$ zobrazení F zadaný Jacobiho maticí.

Diferenciál složeného zobrazení

Věta („Chain rule“)

Nechť $F : E_n \to E_m$ a $G : E_m \to E_r$ jsou dvě diferencovatelná zobrazení, přičemž definiční obor G obsahuje celý obor hodnot F. Pak také složené zobrazení $G \circ F$ je diferencovatelné a jeho diferenciál je v každém bodě z definičního obodu F kompozicí diferenciálů

$$D^1(G \circ F)(x) = D^1G(F(x)) \circ D^1F(x).$$

Příslušná Jacobiho matice je dána součinem příslušných Jacobiho matic.

Polární souřadnice vzniknou z kartézských souřadnic transformací $F : E_2 \to E_2$, kterou v souřadnicích $[x, y]$ a $[r, \varphi]$ zapíšeme:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

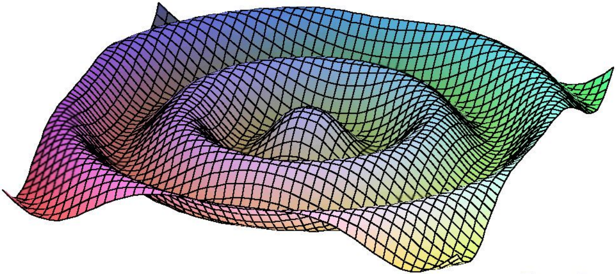
Polární souřadnice vzniknou z kartézských souřadnic transformací $F : E_2 \to E_2$, kterou v souřadnicích $[x, y]$ a $[r, \varphi]$ zapíšeme:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Funkci $g_t : E_2 \to \mathbb{R}$ v polárních souřadnicích

$$g(r, \varphi, t) = \sin(\text{r-t})\,.$$

Funkce nám docela dobře přibližuje vlnění povrchu hladiny po bodovém vzruchu v počátku v čase t:



Chceme-li vypočítat derivaci funkce zadané parametricky v kartézských souřadnicích, využijeme větu o derivaci složeného zobrazení $g \circ F : E_2 \to \mathbb{R}$:

$$D^1(g \circ F)(x) = D^1 g(F(x)) \circ D^1 F(x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\frac{\partial r}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,t) = \cos(\sqrt{x^2+y^2} - t)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 0$$

a podobně

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,t) = \cos(\sqrt{x^2+y^2} - t)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Věta o inverzním zobrazení

Věta

Nechť $F : E_n \to E_n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení na nějakém okolí bodu $x^* \in E_n$ a nechť je Jacobiho matice $D^1F(x^*)$ invertibilní. Pak na nějakém okolí bodu x^* existuje inverzní zobrazení F^{-1} a jeho diferenciál v bodě $F(x^*)$ je inverzním zobrazením k $D^1F(x^*)$, tzn. je zadán inverzní maticí k Jacobiho matici zobrazení F v bodě x^*.

Věta o inverzním zobrazení

Věta

Nechť $F : E_n \to E_n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení na nějakém okolí bodu $x^* \in E_n$ a nechť je Jacobiho matice $D^1F(x^*)$ invertibilní. Pak na nějakém okolí bodu x^* existuje inverzní zobrazení F^{-1} a jeho diferenciál v bodě $F(x^*)$ je inverzním zobrazením k $D^1F(x^*)$, tzn. je zadán inverzní maticí k Jacobiho matici zobrazení F v bodě x^*.

Princip důkazu: Z pravidla pro derivování složené funkce vyplývá, že pokud diferencovatelná inverze existuje, pak musí být její Jacobiho matice inverzí k původní Jacobiho matici (srovnejte s případem 1 proměnné). Důkaz poměrně komplikovaným způsobem vyvozuje, že díky invertovatelnosti Jacobiho matice existuje diferencovatelná inverze.

Věta o implicitní funkci

Pro jednoduchost vyložíme ideu v rovině E_2:

Věta o implicitní funkci

Pro jednoduchost vyložíme ideu v rovině E_2:
Pro spojitě diferencovatelnou funkci $F(x,y) : E_2 \to \mathbb{R}$ hledejme body $[x,y]$, ve kterých platí $F(x,y) = 0$. Příkladem může být třeba obvyklá (implicitní) definice přímek a kružnic:

$$F(x,y) = ax + by + c = 0$$
$$F(x,y) = (x-s)^2 + (y-t)^2 - r^2 = 0, \;\; r > 0.$$

Věta o implicitní funkci

Pro jednoduchost vyložíme ideu v rovině E_2:
Pro spojitě diferencovatelnou funkci $F(x, y) : E_2 \to \mathbb{R}$ hledejme body $[x, y]$, ve kterých platí $F(x, y) = 0$. Příkladem může být třeba obvyklá (implicitní) definice přímek a kružnic:

$$F(x, y) = ax + by + c = 0$$

$$F(x, y) = (x - s)^2 + (y - t)^2 - r^2 = 0, \;\; r > 0.$$

V prvním případě je (při $b \neq 0$) předpisem zadaná funkce

$$y = f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

pro všechna x.

Věta o implicitní funkci

Pro jednoduchost vyložíme ideu v rovině E_2:
Pro spojitě diferencovatelnou funkci $F(x, y) : E_2 \to \mathbb{R}$ hledejme body $[x, y]$, ve kterých platí $F(x, y) = 0$. Příkladem může být třeba obvyklá (implicitní) definice přímek a kružnic:

$$F(x, y) = ax + by + c = 0$$
$$F(x, y) = (x - s)^2 + (y - t)^2 - r^2 = 0, \;\; r > 0.$$

V prvním případě je (při $b \neq 0$) předpisem zadaná funkce

$$y = f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

pro všechna x. Ve druhém případě umíme pouze pro $[a, b]$ splňující rovnici kružnice a $b \neq t$ najít okolí bodu a, na kterém nastane jedna z možností: $y = f(x) = t + \sqrt{(x - s)^2 - r}$, $y = f(x) = t - \sqrt{(x - s)^2 - r}$.

Body $[s \pm r, t]$ také vyhovují rovnici kružnice, platí v nich ale $F_y(s \pm r, t) = 0$, což vystihuje polohu tečny ke kružnici v těchto bodech rovnoběžné s osou y. V těchto bodech neumíme najít okolí, na němž by kružnice byla popsána jako funkce $y = f(x)$.

Body $[s \pm r, t]$ také vyhovují rovnici kružnice, platí v nich ale $F_y(s \pm r, t) = 0$, což vystihuje polohu tečny ke kružnici v těchto bodech rovnoběžné s osou y. V těchto bodech neumíme najít okolí, na němž by kružnice byla popsána jako funkce $y = f(x)$.
Navíc umíme spočítat i **derivace**:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2(x-s)}{\sqrt{(x-s)^2 - r^2}} = \frac{x-s}{y-t} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Body $[s \pm r, t]$ také vyhovují rovnici kružnice, platí v nich ale $F_y(s \pm r, t) = 0$, což vystihuje polohu tečny ke kružnici v těchto bodech rovnoběžné s osou y. V těchto bodech neumíme najít okolí, na němž by kružnice byla popsána jako funkce $y = f(x)$. Navíc umíme spočítat i **derivace**:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2(x-s)}{\sqrt{(x-s)^2 - r^2}} = \frac{x-s}{y-t} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Naopak, pokud budeme chtít najít závislost $x = f(y)$ takovou, aby $F(f(y), y) = 0$, pak v okolí bodů $(s \pm r, t)$ bez problémů uspějeme. Všimněme si, že v těchto bodech je parciální derivace F_x nenulová.

Shrňme pozorování (pro pouhé dva příklady):

Shrňme pozorování (pro pouhé dva příklady):

Pro funkci $F(x, y)$ a bod $[a, b] \in E_2$ takový, že $F(a, b) = 0$, umíme najít funkci $y = f(x)$ splňující $F(x, f(x)) = 0$, pokud je $F_y(a, b) \neq 0$. V takovém případě umíme i vypočíst $f'(x) = -F_x/F_y$. Dokážeme, že takto to platí vždy, navíc rozšířené i na libovolné počty proměnných.

Shrňme pozorování (pro pouhé dva příklady):

Pro funkci $F(x, y)$ a bod $[a, b] \in E_2$ takový, že $F(a, b) = 0$, umíme najít funkci $y = f(x)$ splňující $F(x, f(x)) = 0$, pokud je $F_y(a, b) \neq 0$. V takovém případě umíme i vypočíst $f'(x) = -F_x/F_y$. Dokážeme, že takto to platí vždy, navíc rozšířené i na libovolné počty proměnných.

Poslední tvrzení o derivaci přitom je dobře zapamatovalné (i pochopitelné) z výrazu pro diferenciál:

$$0 = \mathrm{d}F = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y = (F_x + F_y f'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Věta (O implicitní funkci)

Nechť $F : E_{n+1} \to \mathbb{R}$ *je spojitě diferencovatelná funkce na otevřeném okolí bodu* $[x^*, y^*] \in E_n \times \mathbb{R}$, *ve kterém je* $F(x^*, y^*) = 0$ *a* $\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$. *Potom existuje spojitá funkce* $f : E_n \to \mathbb{R}$ *definovaná na nějakém okolí* U *bodu* $x^* \in E_n$ *taková, že* $F(x, f(x)) = 0$ *pro všechny* $x \in U$.
Navíc má funkce f *v okolí bodu* x^* *parciální derivace splňující*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Příklad

Určete lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$, která je určena implicitně rovnicí $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$.

Řešení

Derivováním rovnosti podle x a y dostáváme:

$$2x + 2z \cdot z_x - z - x \cdot z_x - \sqrt{2}yz_x = 0$$
$$2y + 2z \cdot z_y - x \cdot z_y - \sqrt{2}z - \sqrt{2}yz_y = 0,$$

odkud vyjádříme

$$z_x = \frac{z - 2x}{2z - x - \sqrt{2}y}, \qquad z_y = \frac{\sqrt{2}z - 2y}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Řešení (pokr.)

Stacionární body musí splňovat: $z_x = 0$, $z_y = 0$, tj. $z = 2x = \sqrt{2}y$, a tedy $y = \sqrt{2}x$. Dosazením do původní rovnice dostáváme stacionární body $[1, \sqrt{2}, 2]$ a $[-1, -\sqrt{2}, -2]$. V těchto bodech je $F_z \neq 0$ (je to zároveň jmenovatel všech zde vystupujících zlomků), proto je v jejich okolí implicitně určena jistá funkce $z = f(x, y)$.
Dalším derivováním implicitní rovnice vypočteme parciální derivace f 2. řádu:

$$z_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Řešení (pokr.)

Stacionární body musí splňovat: $z_x = 0$, $z_y = 0$, tj. $z = 2x = \sqrt{2}y$, a tedy $y = \sqrt{2}x$. Dosazením do původní rovnice dostáváme stacionární body $[1, \sqrt{2}, 2]$ a $[-1, -\sqrt{2}, -2]$. V těchto bodech je $F_z \neq 0$ (je to zároveň jmenovatel všech zde vystupujících zlomků), proto je v jejich okolí implicitně určena jistá funkce $z = f(x, y)$. Dalším derivováním implicitní rovnice vypočteme parciální derivace f 2. řádu:

$$z_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Ve stacionárních bodech je Hf negativně, resp. pozitivně definitní, proto zde nastávají lokální maximum, resp. minimum funkce f.

Nejobecnější případ, kdy definujeme implicitně zadané zobrazení, popisuje následující věta (v případě n=1 kopíruje větu o implicitní funkci).

Nejobecnější případ, kdy definujeme implicitně zadané zobrazení, popisuje následující věta (v případě n=1 kopíruje větu o implicitní funkci).

Věta (O implicitním zobrazení)

Nechť $F : E_{m+n} \to E_n$ *je spojitě diferencovatelné zobrazení na otevřeném okolí bodu* $[x^*, y^*] \in E_m \times E_n = E_{m+n}$*, v němž platí* $F(x^*, y^*) = \mathbf{0}$ *a* $\det D_y^1 F \neq 0$*. Potom existuje spojitě diferencovatelné zobrazení* $G : E_m \to E_n$ *definované na nějakém okolí* U *bodu* $x^* \in E_m$ *s obrazem* $G(U)$*, který obsahuje bod* y^**, a takové, že* $F(x, G(x)) = 0$ *pro všechny* $x \in U$*.*
Navíc je Jacobiho matice $D^1 G$ *zobrazení* G *na okolí bodu* x^* *zadána součinem matic*

$$D^1 G(x) = -(D_y^1 F)^{-1}(x, G(x)) \cdot D_x^1 F(x, G(x)).$$