Matematika III
4. ledna 2008

Jméno: Michal Bulant (UČO: 2759)

Hodnocení:

Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (včetně bonusu) je 15 bodů.
Na práci máte 90 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Plyne z existence derivací v libovolném směru funkce f v bodě a i existence všech parciálních derivací f v bodě a?

(b) **ano** — **ne** Jsou-li všechny hlavní minory matice A kladné, je A pozitivně definitní.

(c) **ano** — **ne** Spojitá funkce nabývá svého absolutního extrému výhradně v některém hraničním bodě.

(d) **ano** — **ne** Počet hran v úplném grafu K_n je roven $n(n-1)$.

(e) **ano** — **ne** Graf K_n je vrcholově 2-souvislý.

(f) **ano** — **ne** Každý graf s $n \geq 3$ vrcholy, které jsou všechny stupně alespoň $n-1$, je nutně hamiltonovský.

Příklady:

1. (6bodů) Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g)$, kde

$$f(x, y) = x \sin(\pi y), \quad g(x, y) = x^2 y,$$

prosté v okolí bodu $[1, -3]$. Pokud ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $F(1, -3)$.

2. (6bodů) Vypočtěte objem množiny A dané nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, \quad z \geq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. (6bodů) Určete x tak, aby posloupnost $(8, x, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1, 1, 1)$ byla skórem nějakého grafu a graf nakreslete.

4. (6bodů) S využitím vytvořujících funkcí řešte rekurenci

$$g_n = 3g_{n-1} + 1 \text{ pro } n \geq 1,\ g_0 = 0.$$