

PB165 Grafy a sítě:

5. Plánování a rozvrhování

Plánování a rozvrhování

- 1 Terminologie a klasifikace
 - Úvod
 - Vlastnosti stroje
 - Omezení
 - Optimalizace

- 2 Grafová reprezentace (1.část)
 - Precedenční omezení
 - Disjunktivní grafová reprezentace

Úvod

Rozvrhování a plánování (scheduling)

● Rozvrhování

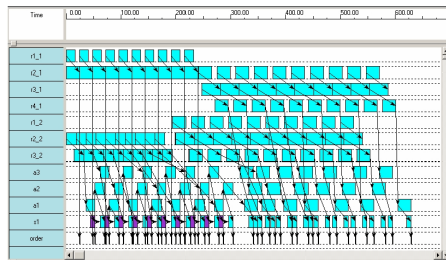
- optimální alokace/přiřazení zdrojů v čase množině úloh
- omezené množství zdrojů
- maximalizace zisku za daných omezení

● Zdroj

- kapacita
- dostupnost v čase
- rychlost

● Úloha

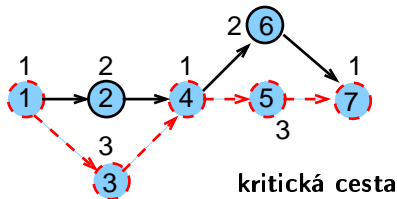
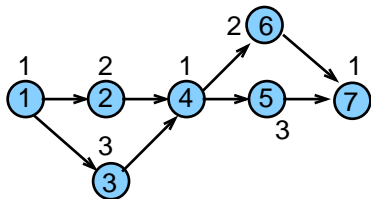
- nejdřívejší startovní čas
- nejpozdější koncový čas
- doba trvání (ref. zdroj)
- počet zdrojů
- alternativní zdroje



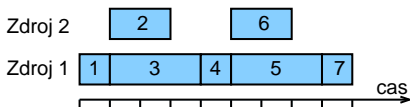
Visopt ShopFloor System

Příklad

- Rozvrhování 7 úloh na 2 zdrojích
 - doba trvání úlohy + precedenční podmínky
 - nalezení rozvrhu tak, aby se minimalizovala doba nutná na realizaci všech úloh



- Možný rozvrh
 - na kritické (nejdelší) cestě nesmí vzniknout zdržení



Úlohy, stroje

- **Stroje (zdroje, prostředky)** $i = 1, \dots, m$
- **Úlohy (aktivity)** $j = 1, \dots, n$
- (i, j) operace nebo provádění úlohy j na stroji i
- Statické parametry úlohy
 - **doba trvání** p_{ij}, p_j : doba provádění úlohy j na stroji i
 - **termín dostupnosti j (release date)** r_j : nejdřívejší čas, ve kterém může být úloha j prováděna
 - **termín dokončení (due date)** d_j : čas, do kdy musí být úloha j nejpozději dokončena
 - **váha** w_j : důležitost úlohy j relativně vzhledem k ostatním úlohám v systému
- Dynamické parametry úlohy
 - **čas startu úlohy (start time)** S_{ij}, S_j : čas, kdy začne provádění úlohy j na stroji i
 - **čas konce úlohy (completion time)** C_{ij}, C_j : čas, kdy je dokončeno provádění úlohy j na stroji i

Grahamova klasifikace

Grahamova klasifikace $\alpha|\beta|\gamma$

používá se pro popis rozvrhovacích problémů

- α : charakteristiky stroje
 - popisuje způsob alokace úloh na stroje
- β : charakteristiky úloh
 - popisuje omezení aplikovaná na úlohy
- γ : optimalizační kritéria

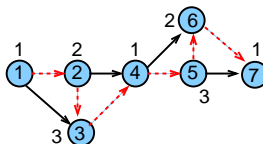
<http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class/>

- složitost a algoritmy pro jednotlivé rozvrhovací problémy

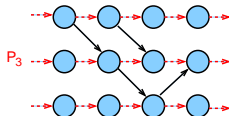
Vlastnosti stroje

 α

- Jeden stroj 1: 1 | ... | ...



- Identické paralelní stroje P_m
 - m strojů (zapojených paralelně)
 - úloha j je jedna operace a ta může být prováděna na libovolném z m strojů



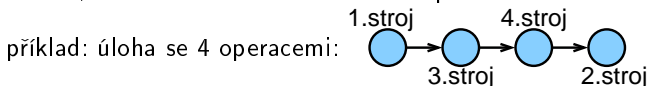
- Paralelní stroje s různou rychlostí Q_m
 - příklad: několik počítačů s různou rychlostí procesoru
- Nezávislé paralelní stroje s různou rychlostí R_m
 - stroje mají různou rychlost pro různé úlohy
 - příklad: vektorový počítač počítá vektorové úlohy rychleji než klasické PC

Multi-operační (*shop*) problémy

 α

● Multi-operační (*shop*) problémy

- jedna úloha je prováděna postupně na několika strojích
- lze říci, že úloha se skládá z několika operací



● *Job shop* J_m

- m strojů
- úloha musí být prováděna na všech strojích
- každá úloha má předem definované pořadí, ve kterém je prováděna na jednotlivých strojích
- Multi-operační problémy jsou klasické detailně studované problémy **operačního výzkumu**
 - reálné problémy mnohem komplikovanější
 - metody řešení lze použít jako základ pro řešení složitějších problémů
 - př. automobilová výrobní linka

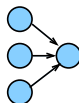
Omezení

 β

- **Precedenční podmínky**

prec

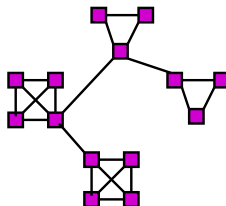
- úloha může být prováděna až po skončení další(ch) úloh



- **Vhodnost stroje**

 M_j

- podmnožina strojů M_j , na ní lze provádět úlohu j
 - př. úloha může být prováděna pouze na těch strojích v počítačové síti, kde jsou dostupná data



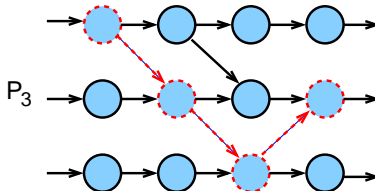
Omezení

 β

● Omezení na pracovní sílu

 W_i

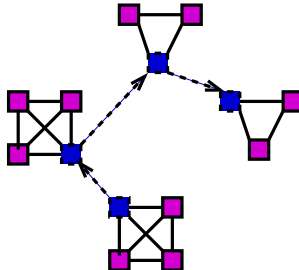
- stroje mohou potřebovat operátory a úlohy lze provádět pouze pokud jsou dostupní W operátorů
- mohou existovat různé skupiny operátorů se specifickou kvalifikací W_i je počet operátorů ve skupině i
- př. hw zařízení (mikroskop) dostupné pouze pro jednu úlohu



Omezení

 β

- **Směrovací (*routing*) omezení**
 - udávají, na kterých strojích musí být úloha prováděna
 - vazba na směrování v počítačových sítích
 - pořadí provádění úlohy v multi-operačních problémech



Omezení

 β

- **Nastavovací (*setup*) doba a cena**

 $s_{ijk}, s_{jk} \quad c_{ijk}, c_{jk}$

- závislé na posloupnosti provádění
- s_{ijk} čas nutný pro provádění úlohy k po úloze j na stroji i
- c_{ijk} cena nutná . . .
- s_{jk}, c_{jk} nastavovací doba a cena nezávislá na stroji
- příklad: plnění limonád do lahví

Omezení

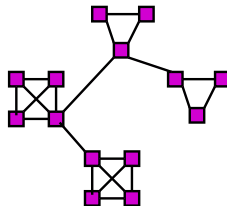
 β

• Doprava a komunikace

 t_{jkl}, t_{kl}, t_j

- t_{jkl} doba na přepravu ze stroje k na stroj l pro úlohu j
- t_{kl} doba nezávislá na úloze
- t_j doba nezávislá na strojích
- doba nutná na přepravu mezi dvěma zařízeními
- omezení na množství a možnou dobu přepravy
- propustnost linky a vzdálenost uzlů v počítačové síti

t_{kl} dáno vzdáleností uzlů v síti/grafu:



Optimalizace: *makespan*

 γ

- Maximální čas konce úloh (*makespan*)

$$C_{\max} = \max(C_1, \dots, C_n)$$

- Minimalizace makespan často
 - maximalizuje **výkon** (*throughput*)
 - zajišťuje **rovnoměrné zatížení strojů** (*load balancing*)
- Velmi často používané kritérium

Optimalizace: termín dokončení d_j

 γ

- Zpoždění (*lateness*) $L_j = C_j - d_j$
- Minimalizace *lateness*

$$L_{\max} = \max(L_1, \dots, L_n)$$

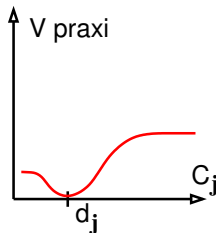
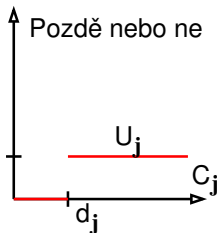
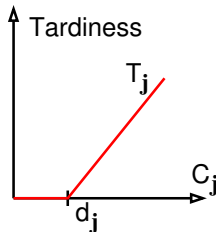
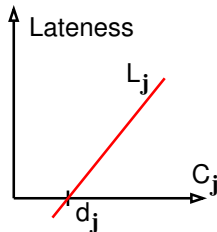
- Nezáporné zpoždění (*tardiness*) $T_j = \max(C_j - d_j, 0)$
- Minimalizace maximální *tardiness*

$$\sum_{j=1}^n T_j \quad \text{celkové zpoždění úloh}$$

- Minimalizace maximální vážené *tardiness*

$$\sum_{j=1}^n w_j T_j \quad \text{vážené zpoždění úloh}$$

Termín dokončení a grafy

 γ


1 Terminologie a klasifikace

- Úvod
- Vlastnosti stroje
- Omezení
- Optimalizace

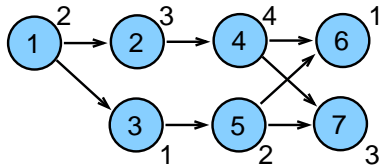
2 Grafová reprezentace (1.část)

- Precedenční omezení
- Disjunktivní grafová reprezentace

Precedenční omezení

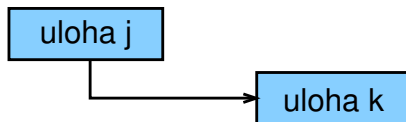
- Úloha může být prováděna až po skončení další(ch) úloh
 - úloha a před úlohou b : $a \rightarrow b : S_a + p_a \leq S_b$
- Orientovaný acyklický vrcholově ohodnocený graf**
 - uzly** reprezentují úlohy
 - hrany** reprezentují precedenční podmínky
 - ohodnocení vrcholu** reprezentuje doba trvání
 - graf bez cyklů (pro cyklický graf neexistuje žádné řešení)

Úloha	Doba trvání	Předchůdci
1	2	–
2	3	1
3	1	1
4	4	2
5	2	3
6	1	4,5
7	3	4,5

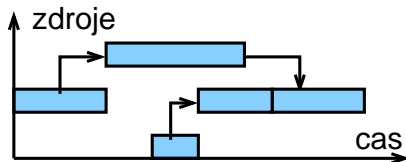


Úloha jako obdélník

- Úloha jako uzel lze převést na **úloha jako obdélník**



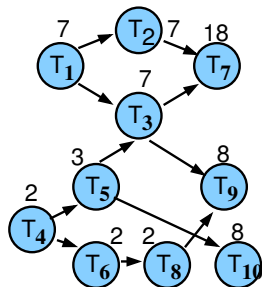
- Horizontální strany obdélníku použity jako časové osy odpovídající době provádění úlohy



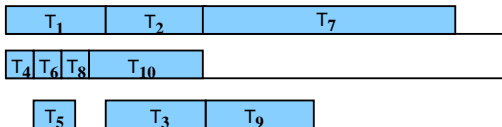
Precedenční omezení

Montáž kola

- 3 pracovníci
- Každá úloha má určenou dobu trvání
- Precedenční podmínky
- Nepreemptivní (úlohy nelze přerušit)



Prirazení uloh

Optimální
přirazení uloh

Precedenční omezení: aplikace

- **Zprostředkování, instalace a testování rozsáhlého počítačového systému**
 - projekt zahrnuje
 - evaluace a výběr hardware, vývoj software, nábor a školení lidí, testování a ladění systému, ...
 - **precedenční vztahy**
 - některé úlohy mohou být prováděny paralelně
 - úloha musí být realizována až po dokončení jiných úloh
 - cíl: **minimalizovat čas** na realizaci celého projektu
- Obecně: **problémy plánování projektu**
- **Plánování workflows**
 - ① orientovaný acyklický graf pro provádění úloh na počítačové síti
 - ② obecné rozšíření: cyklické grafy + podmínky vyhodnocení cyklů

Disjunktivní grafová reprezentace

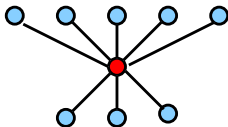
Disjunktivní grafová reprezentace a multi-operační rozvrhování

- n úloh
- m strojů
- Jedna úloha je prováděna postupně na několika strojích
- **Operace** (i, j) : provádění úlohy j na stroji i
- Pořadí operací úlohy je stanoveno:
 - $(i, j) \rightarrow (k, j)$ specifikuje, že úloha j má být prováděna na stroji i dříve než na stroji k
- p_{ij} : trvání operace (i, j)
- Cíl: rozvrhovat úlohy na strojích
 - bez překrytí na strojích
 - bez překrytí v rámci úlohy
 - minimalizace *makespan* C_{max}

Aplikace: automobilová montážní linka

- Rozdílné typy aut na montážní lince
 - dvou-dveřové kupé, čtyř-dveřový sedan, ...
 - rozdílné barvy
 - rozdílné vybavení: automatická vs. manuální převodovka, posuvná střech, ...

- Kritická místa (*bottlenecks*)



- výkon stroje ovlivňuje tempo výroby
 - např. lakování (změna barvy vyžaduje časově náročné čištění)
- Cíl
 - **maximalizace výkonnosti** vhodným **seřazením automobilů**,
 - **rovnoměrná pracovní zátěž** na jednotlivých výrobních místech

Příklad: *job shop* problém

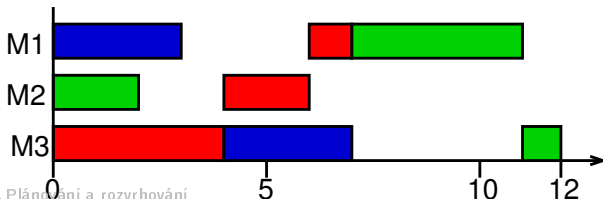
Data:

- stroje: $M1, M2, M3$
- úlohy: $J1 : (3, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 1)$
 $J2 : (1, 2) \rightarrow (3, 2)$
 $J3 : (2, 3) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (3, 3)$



- doby trvání: $p_{31} = 4, p_{21} = 2, p_{11} = 1$
 $p_{12} = 3, p_{32} = 3$
 $p_{23} = 2, p_{13} = 4, p_{33} = 1$

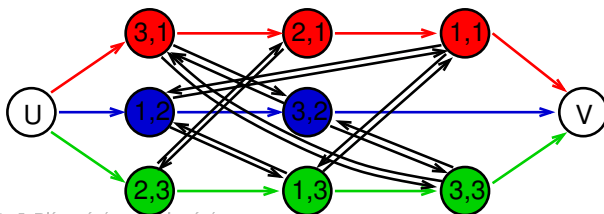
Řešení:



Disjunktivní grafová reprezentace

Graf $G = (N, A \cup B)$

- uzly odpovídají operacím $N = \{(i, j) | (i, j) \text{ je operace}\}$
- konjunktivní hrany** A reprezentují pořadí operací úlohy
 - $(i, j) \rightarrow (k, j) \in A \iff$ operace (i, j) předchází (k, j)
- disjunktivní hrany** B reprezentují konflikty na strojích
 - dvě operace (i, j) a (i, l) jsou spojeny dvěma opačně orientovanými hranami
- dva pomocné uzly U a V reprezentující zdroj a stok
- hrany z U ke všem prvním operacím úlohy
- hrany ze všech posledních operací úlohy do V



Výběr hran

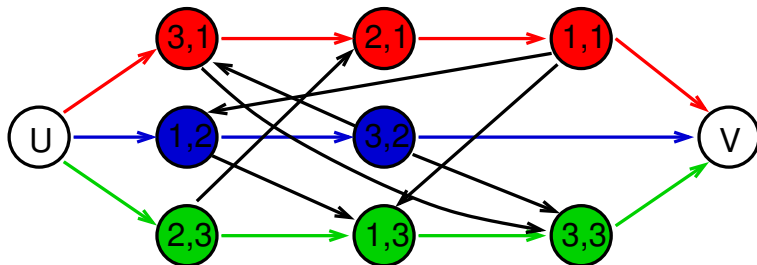
Pojmy:

- Podmnožina $D \subset B$ je nazývána **výběr**, jestliže obsahuje z každého páru disjunktivních hran právě jednu
- Výběr D je **splnitelný**, jestliže výsledný orientovaný graf $G(D) = (N, A \cup D)$ je acyklický
 - jedná se o graf s konjunktivními hranami a vybranými diskjunktivními hranami

Poznámky:

- splnitelný výběr určuje posloupnost, ve které jsou operace prováděny na strojích
- každý (konzistentní) rozvrh jednoznačně určuje splnitelný výběr
- každý splnitelný výběr jednoznačně určuje (konzistentní) rozvrh

Příklad: nesplnitelný výběr



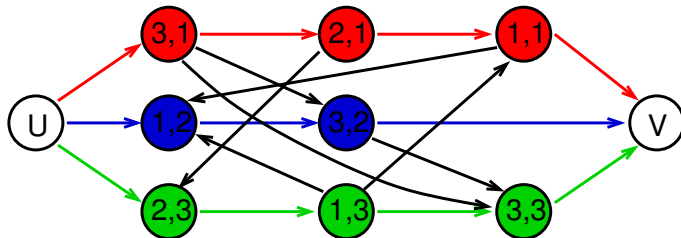
V grafu existuje v důsledku nevhodného výběru hran cyklus:

- $(1, 2) \rightarrow (3, 2)$
- $(3, 2) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 2)$

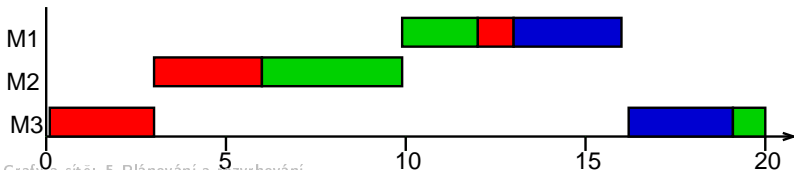
\Rightarrow nelze splnit (k tomuto výběru neexistuje rozvrh)

Příklad: splnitelný výběr

Jakým způsobem nalézt rozvrh pro daný splnitelný výběr?



Tedy: jakým způsobem lze nalézt tento odpovídající rozvrh:



Výpočet rozvrhu pro výběr

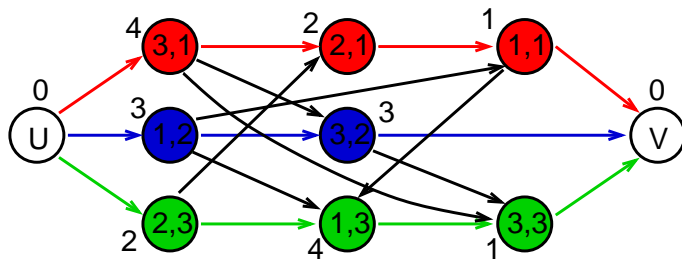
Metoda: výpočet **nejdelších cest** z U do dalších uzlů v $G(D)$

Technický popis:

- uzly (i, j) mají **ohodnocení** p_{ij} , uzel U má ohodnocení 0
- **délka cesty** i_1, i_2, \dots, i_r : součet ohodnocení uzlů i_1, i_2, \dots, i_{r-1}
- spočítej délku l_{ij} nejdelší cesty z U do (i, j) a V
 - např. použitím Dijkstrova algoritmu
- zahaj operaci (i, j) v čase l_{ij}
- délka nejdelší cesty z U do V je rovna *makespan*
 - tato cesta je kritická cesta

Disjunktivní grafová reprezentace

Výpočet rozvrhu pro výběr

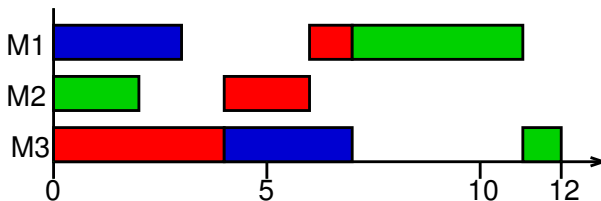


Výpočet l_{ij} :

uzel	(3,1)	(1,2)	(2,3)	(2,1)	(3,2)	(1,1)	(1,3)	(3,3)	V
délka	0	0	0	4	4	6	7	11	12

Příklad: výběr pro daný rozvrh

Nalezněte výběr hran pro daný rozvrh:



Konstrukce odpovídajícího výběru: vybereme disjunktivní hrany, které odpovídají uspořádání operací úlohy v rozvrhu

