

PB165 Grafy a sítě: 6. Grafová reprezentace

Shrnutí

Minule

- Rozvrhování: optimální přiřazení zdrojů v čase množině úloh
- Grafová reprezentace: orientované vrcholově ohodnocené grafy
 - precedenční podmínky
 - multi-operační rozvrhování a disjunktivní grafová reprezentace

Dnes

- orientované vrcholově/hranově ohodnocené grafy
- plánování jako barvení grafu

Obsah přednášky

- 1 Ohodnocené grafy
 - Problém obchodního cestujícího
 - Doba na dopravu
 - Plánování na počítačové síti

- 2 Barvení grafu
 - Popis problému a jednoduché řešení
 - Přiřazení místností
 - Rezervační problém
 - Rozvrhování operátorů

Problém obchodního cestujícího

- Doba na nastavení (setup time) s_{kj}
 - s_{kj} čas nutný pro provádění úlohy k po úloze j
 - problém $1|s_{jk}|C_{\max}$
- Problém obchodního cestujícího
 - obchodní cestující musí projet všechna města tak, aby celková ujetá vzdálenost (resp. doba cesty) byla minimální a každé město projel právě jednou
- Grafová reprezentace
 - (orientovaný) hranově ohodnocený graf
 - vrchol = město
 - (orientovaná) hrana z A do B = přímá cesta z A do B
 - hrany mohou být orientované, pokud chceme uvažovat různou náročnost v opačných směrech cesty
 - ohodnocení hrany z A do B = doba nutná na cestu z A do B
- **Problém obchodního cestujícího = $1|s_{jk}|C_{\max}$**

Doba na dopravu

- Multi-operační rozvrhování

- úloha

- skládá z několika operací
- může/nemusí být určeno jejich pořadí

- operace má zadáno

- dobu provádění, konkrétní stroj k provádění

- stroj: na každém stroji maximálně jedna operace

- doba na dopravu (transportation time) t_{hl} mezi stroji h a l

- kapacita cest mezi stroji neomezená

- cíl: realizovat všechny operace všech úloh

při minimalizaci času dokončení všech úloh

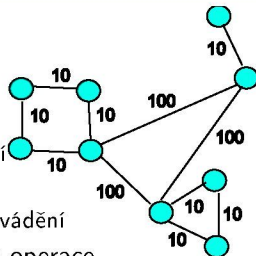
- Grafová reprezentace

- orientovaný hranově ohodnocený graf

- vrchol: stroj

- hrana: pokud lze přejít přímo z jednoho stroje na druhý

- ohodnocení hrany: doba na dopravu z jednoho stroje na druhý

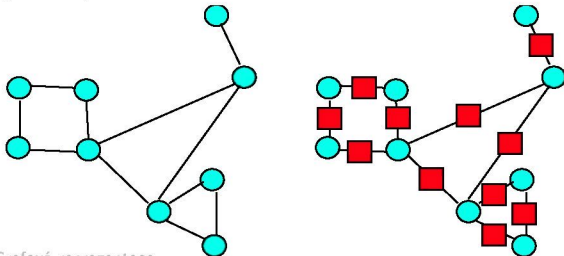


Plánování na počítačové síti

- Stroj: počet procesorů
- Úlohy prováděny na jednom uzlu počítačové sítě
 - vyžadují několik procesorů
- Úlohy potřebují k výpočtu data
 - data dané velikosti na jednom nebo více uzlech
 - data je nutné přenést na uzel, kde se úloha bude počítat
 - realita: data jsou často zreplikována na několika uzlech
- Linka:
 - **propustnost** = kapacita linky
 - **latence** = doba nutná na přenos dat po lince
- Cíl: realizovat všechny úlohy
 - úlohy musí mít dostatek procesorů
 - data musí ležet v době výpočtu na uzlu, kde se počítá úloha
 - je nutné plánovat i přenosy dat tak, aby bylo možné data přenést vzhledem k latenci i propustnosti linek na cestě

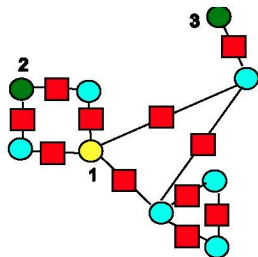
Počítačová síť: grafová reprezentace

- Vrcholově ohodnocený neorientovaný graf
- Vrchol: stroj nebo linka
- Ohodnocení vrcholu-stroje: počet procesorů
- Ohodnocení vrcholu-linky: propustnost linky
 - linka je chápána jako zdroj, jehož kapacita odpovídá propustnosti
 - doba trvání úlohy na lince odpovídá latenci
- Hrany: pokud jsou stroje A a B přímo spojeny linkou C, pak existují hrany AC a BC

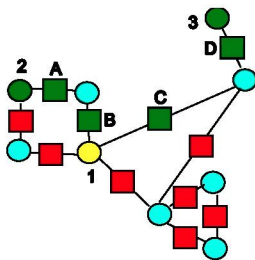


Plánování úlohy na počítačové síti: příklad

- Úloha naplánována k provádění na uzlu 1
- Data na uzlech 2 a 3



- Data jsou přenesena přes D,C a A,B
- Kapacita linky/zdrojů A,B,C,D musí mít v daném čase postačující propustnost
- Celková doba přenosu do 1:
 $\max(\text{latenceA} + \text{latenceB}, \text{latenceD} + \text{latenceC})$



Základní otázka: je možné **nyní** takovouto úlohu naplánovat?
 A je možné ji naplánovat při modifikaci cest pro přenosy?

Barvení grafu

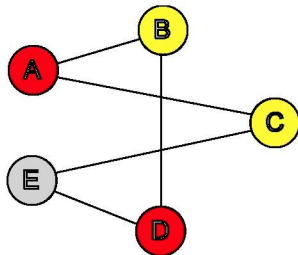
Problém barvení grafu

- Je možné obarvit vrcholy grafu s použitím n barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou?

Chromatické číslo grafu

- Minimální počet barev n nutný k obarvení grafu tak, by žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou.

NP-úplný problém



Barvení grafu a rozvrhování

- Rezervační problémy
- Přřazení místností
- Rozvrhování operátorů

Heuristiky pro barvení grafu se saturací

- **Stupeň uzlu**
 - počet hran spojených s uzlem
- **Úroveň saturace**
 - počet různých barev spojených s uzlem
- Intuice
 - obarvi uzly s vyšším stupněm dříve
 - obarvi uzly s vyšší úrovní saturace dříve
- **Algoritmus**
 - 1 uspořádej uzly v klesajícím pořadí podle jejich stupně
 - 2 použij barvu 1 pro první uzel
 - 3 vyber neobarvený uzel s maximální úrovní saturace
v případě volby z nich vyber uzel
s maximálním stupněm v neobarveném podgrafu
 - 4 obarvi vybraný uzel s nejmenší možnou barvou
 - 5 jestliže jsou všechny uzly obarveny STOP
jinak běž na krok 3

Přřazení místností

- **Problém přřazení místností**
 - úloha = předmět s několika schůzkami týdně, zdroj = místnost
 - dva předměty nesmí být zároveň vyučovány ve stejné místnosti
 - všechny schůzky předmětu musí být vyučovány ve stejné místnosti

rozvrh: přřazení místnosti každému předmětu

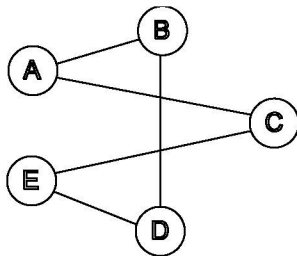
možné řešení:

- nalezení rozvrhu s minimálním počtem místností
- nalezení rozvrhu vzhledem k danému počtu místností
- **Přřazení místností jako barvení grafu**
 - vrchol: předmět
 - barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti
 - hrana: mezi předměty vyžadujícími stejný čas výuky
(musí mít různé místnosti a také různé barvy)

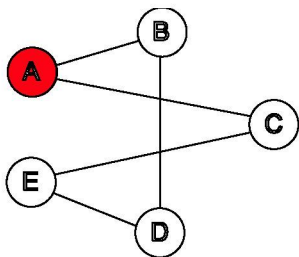
Přřazení místností: příklad

Kolik místností je třeba k rozvrhování těchto pŕedmětů?

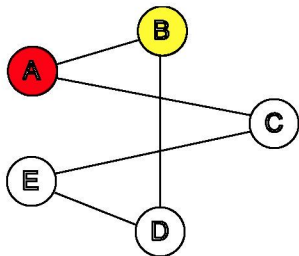
pŕedmět	A	B	C	D	E
čas	(1,4)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(2,5)
stupeň	2	2	2	2	2



Přřazení místností: příklad (pokračování)

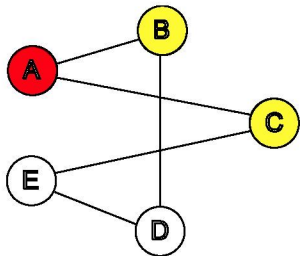


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	1	1	0	0
stupeň neob.	-	1	1	2	2

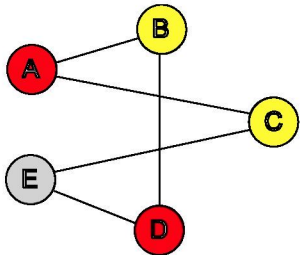
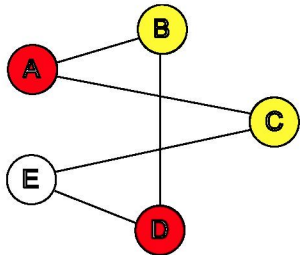


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	1	1	0
stupeň neob.	-	-	1	1	2

Přřazení místností: příklad (dokončení)

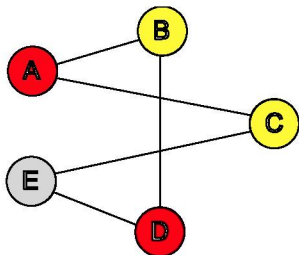


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	-	1	1
stupeň neob.	-	-	-	1	1



Přřazení místností: příklad (řešení)

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,4)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(2,5)
místnost	červená	žlutá	žlutá	červená	šedá



čas/předmět	A	B	C	D	E
1	+	+	-	-	-
2	-	-	+	-	+
3	-	+	-	+	-
4	+	-	+	-	-
5	-	-	-	+	+

Rezervační problém

- Příklady
 - rezervace aut
 - rezervace pokojů v hotelu
 - rezervace strojů v továrně
- Určen časový interval pro každou rezervaci
 - $p_j = r_j - d_j$
 - p_j doba trvání úlohy
 - r_j termín dostupnosti
 - d_j termín dokončení
- Každá rezervace vyžaduje zdroj (auto, pokoj, stroj)
- Možné řešení
 - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací
 - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů

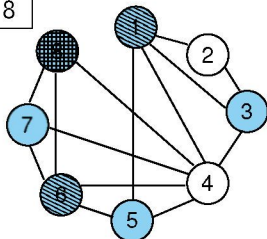
Rezervační problém jako barvení grafu

- Graf
 - vrchol: rezervace
 - hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase
- Barva vrcholu: koresponduje vybranému zdroji
 - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací
= chromatické číslo
 - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů
= existuje barvení s daným počtem barev

- Příklad:

j	1	2	3	4	5	6	7	8
r_j	0	1	1	3	4	5	6	6
d_j	5	3	4	7	6	7	9	8

Odpovídající problém barvení grafu:



Rozvrhování operátorů

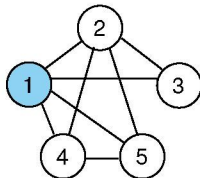
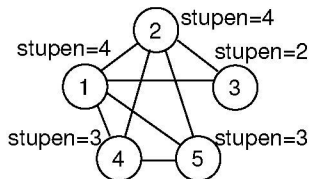
- Zadáno několik různých operátorů
- Úloha potřebuje jeden nebo více specifických operátorů
- Úlohy vyžadující stejného operátora nemohou běžet zároveň
- Jednotková doba trvání úlohy
- Možné řešení:
 - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu
 - nalezení minimálního času (=makespan) tak, aby byly provedeny všechny úlohy
- Rozvrhování operátorů jako barvení grafu
 - vrchol: úloha
 - hrana: mezi úlohami, které potřebují stejného operátora
 - barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy
 - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu
= existuje barvení s daným počtem barev
 - makespan = chromatické číslo grafu

Příklad: plánování schůzek

Vytvoř rozvrh pro 5 schůzek se 4 lidmi

- schůzka = úloha, člověk = operátor
- všechny schůzky trvají jednu hodinu

	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1



Můžeme vybrat buď
úlohu 1 nebo úlohu 2

Např. vybereme 1 a obarvíme
barvou 1

Cvičení (pokračování)

- 3 Určete, kolik času je potřeba pro realizaci operací na uvedených strojích, jestliže může být na každém stroji zpracovávána nejvýše jedna operace.

operace	1	2	3	4	5	6	7
stroje	A,B	C,D	A,C,E	E,F	E,G	D,G	G

Nápověda: rozvrhování operátorů