

PB165 Grafy a sítě: 6. Grafová reprezentace

Shrnutí

Minule

- **Rozvrhování**: optimální přiřazení zdrojů v čase množině úloh
- Grafová reprezentace: **orientované vrcholově ohodnocené grafy**
 - **precedenční podmínky**
 - multi-operační rozvrhování a disjunktivní grafová reprezentace

Dnes

- **orientované vrcholově/hranově ohodnocené grafy**
- plánování jako barvení grafu

Obsah přednášky

- 1 Ohodnocené grafy**
 - Problém obchodního cestujícího
 - Doba na dopravu
 - Plánování na počítačové síti

- 2 Barvení grafu**
 - Popis problému a jednoduché řešení
 - Přiřazení místností
 - Rezervační problém
 - Rozvrhování operátorů

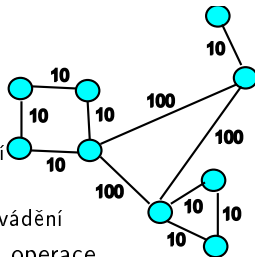
Problém obchodního cestujícího

- **Doba na nastavení (setup time) s_{kj}**
 - s_{kj} čas nutný pro provádění úlohy k po úloze j
 - problém $1|s_{jk}|C_{\max}$
- **Problém obchodního cestujícího**
 - obchodní cestující musí projet všechna města tak, aby celková ujetá vzdálenost (resp. doba cesty) byla minimální a každé město projel právě jednou
- **Grafová reprezentace**
 - **(orientovaný) hranově ohodnocený graf**
 - vrchol = město
 - (orientovaná) hrana z A do B = přímá cesta z A do B
 - hrany mohou být orientované, pokud chceme uvažovat různou náročnost v opačných směrech cesty
 - ohodnocení hrany z A do B = doba nutná na cestu z A do B
- **Problém obchodního cestujícího = $1|s_{jk}|C_{\max}$**

Doba na dopravu

- **Multi-operační rozvrhování**

- úloha
 - skládá z několika operací
 - může/nemusí být určeno jejich pořadí
- operace má zadáno
 - dobu provádění, konkrétní stroj k provádění
- stroj: na každém stroji maximálně jedna operace
- **doba na dopravu (transportation time) t_{hl}** mezi stroji h a l
 - kapacita cest mezi stroji neomezená
- cíl: realizovat všechny operace všech úloh při minimalizaci času dokončení všech úloh



- **Grafová reprezentace**

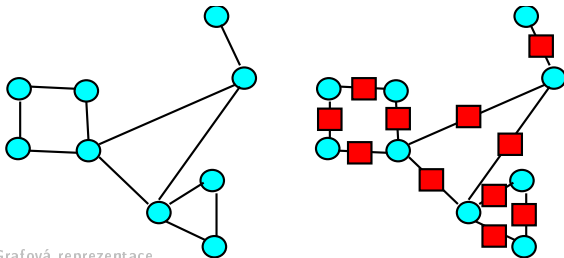
- **orientovaný hranově ohodnocený graf**
- vrchol: stroj
- hrana: pokud lze přejít přímo z jednoho stroje na druhý
- ohodnocení hrany: doba na dopravu z jednoho stroje na druhý

Plánování na počítačové síti

- Stroj: počet procesorů
- Úlohy prováděny na jednom uzlu počítačové sítě
 - vyžadují několik procesorů
- Úlohy potřebují k výpočtu data
 - data dané velikosti na jednom nebo více uzlech
 - data je nutné přenést na uzel, kde se úloha bude počítat
 - realita: data jsou často zreplikována na několika uzlech
- Linka:
 - **propustnost** = kapacita linky
 - **latence** = doba nutná na přenos dat po lince
- Cíl: realizovat všechny úlohy
 - úlohy musí mít dostatek procesorů
 - data musí ležet v době výpočtu na uzlu, kde se počítá úloha
 - je nutné plánovat i přenosy dat tak, aby bylo možné data přenést vzhledem k latenci i propustnosti linek na cestě

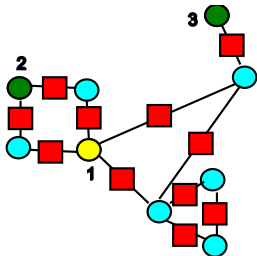
Počítačová síť: grafová reprezentace

- **Vrcholově ohodnocený neorientovaný graf**
- **Vrchol: stroj nebo linka**
- Ohodnocení vrcholu-stroje: počet procesorů
- Ohodnocení vrcholu-linky: propustnost linky
 - linka je chápána jako zdroj, jehož kapacita odpovídá propustnosti
 - doba trvání úlohy na lince odpovídá latenci
- Hrany: pokud jsou stroje A a B přímo spojeny linkou C, pak existují hrany AC a BC

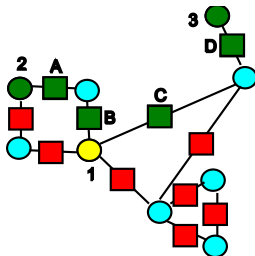


Plánování úlohy na počítačové síti: příklad

- Úloha naplánována k provádění na uzlu 1
- Data na uzlech 2 a 3



- Data jsou přenesena přes D, C a A, B
- Kapacita linky/zdrojů A, B, C, D musí mít v daném čase postačující propustnost
- Celková doba přenosu do 1:
 $\max(\text{latenceA} + \text{latenceB}, \text{latenceD} + \text{latenceC})$



Základní otázka: je možné **nyní** takovouto úlohu naplánovat?
A je možné ji naplánovat při modifikaci cest pro přenosy?

Barvení grafu

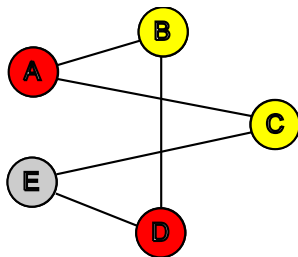
Problém barvení grafu

- Je možné obarvit vrcholy grafu s použitím n barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou?

Chromatické číslo grafu

- Minimální počet barev n nutný k obarvení grafu tak, by žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou.

NP-úplný problém



Barvení grafu a rozvrhování

- Rezervační problémy
- Přirazení místností
- Rozvrhování operátorů

Heuristiky pro barvení grafu se saturací

- **Stupeň uzlu**
 - počet hran spojených s uzlem
- **Úroveň saturace**
 - počet různých barev spojených s uzlem
- Intuice
 - obarvi uzly s vyšším stupněm dříve
 - obarvi uzly s vyšší úrovní saturace dříve
- **Algoritmus**
 - ① uspořádej uzly v klesajícím pořadí podle jejich stupně
 - ② použij barvu 1 pro první uzel
 - ③ vyber neobarvený uzel s maximální úrovní saturace
v případě volby z nich vyber uzel
s maximálním stupněm v neobarveném podgrafu
 - ④ obarvi vybraný uzel s nejmenší možnou barvou
 - ⑤ jestliže jsou všechny uzly obarveny STOP
jinak běž na krok 3

Přirazení místností

- **Problém přirazení místností**

- úloha = předmět s několika schůzkami týdně, zdroj = místnost
- dva předměty nesmí být zároveň vyučovány ve stejné místnosti
- všechny schůzky předmětu musí být vyučovány ve stejné místnosti

rozvrh: přirazení místnosti každému předmětu

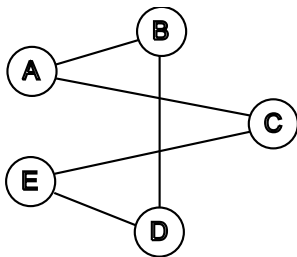
možné řešení:

- nalezení rozvrhu s minimálním počtem místností
- nalezení rozvrhu vzhledem k danému počtu místností
- **Přirazení místností jako barvení grafu**
 - vrchol: předmět
 - barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti
 - hrana: mezi předměty vyžadujícími stejný čas výuky (musí mít různé místnosti a také různé barvy)

Přirazení místností: příklad

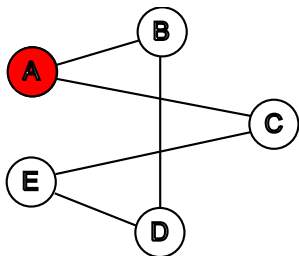
Kolik místností je třeba k rozvrhování těchto předmětů?

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,4)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(2,5)
stupeň	2	2	2	2	2

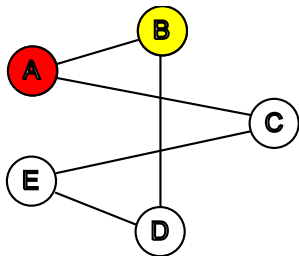


Přirazení místností

Přirazení místností: příklad (pokračování)



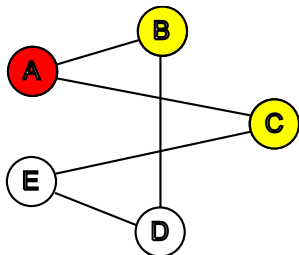
předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	1	1	0	0
stupeň neob.	-	1	1	2	2



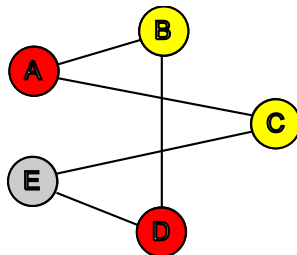
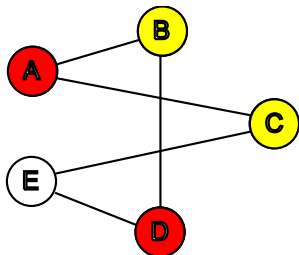
předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	1	1	0
stupeň neob.	-	-	1	1	2

Přirazení místností

Přirazení místností: příklad (dokončení)



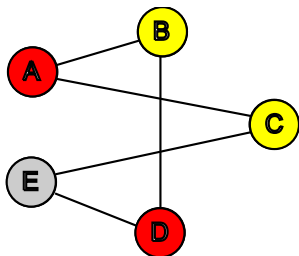
předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	-	1	1
stupeň neob.	-	-	-	1	1



Přirazení místností

Přirazení místností: příklad (řešení)

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,4)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(2,5)
místnost	červená	žlutá	žlutá	červená	šedá



čas/předmět	A	B	C	D	E
1	+	+	-	-	-
2	-	-	+	-	+
3	-	+	-	+	-
4	+	-	+	-	-
5	-	-	-	+	+

Rezervační problém

- Příklady
 - rezervace aut
 - rezervace pokojů v hotelu
 - rezervace strojů v továrně
- Určen časový interval pro každou rezervaci
 - $p_j = r_j - d_j$
 - p_j doba trvání úlohy
 - r_j termín dostupnosti
 - d_j termín dokončení
- Každá rezervace vyžaduje zdroj (auto, pokoj, stroj)
- Možné řešení
 - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací
 - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů

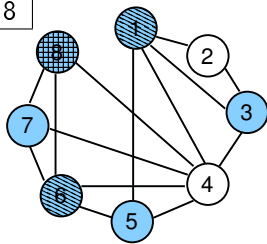
Rezervační problém jako barvení grafu

- Graf
 - vrchol: rezervace
 - hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase
- Barva vrcholu: koresponduje vybranému zdroji
 - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací
= chromatické číslo
 - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů
= existuje barvení s daným počtem barev

- Příklad:

j	1	2	3	4	5	6	7	8
r_j	0	1	1	3	4	5	6	6
d_j	5	3	4	7	6	7	9	8

Odovídající problém barvení grafu:



Rozvrhování operátorů

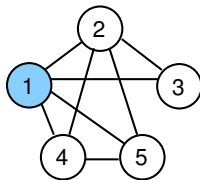
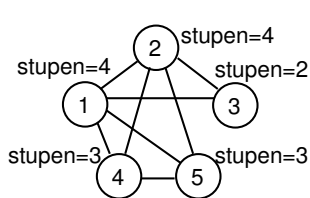
- Zadáno několik různých operátorů
- Úloha potřebuje jeden nebo více specifických operátorů
- Úlohy vyžadující stejného operátora nemohou běžet zároveň
- Jednotková doba trvání úlohy
- Možné řešení:
 - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu
 - nalezení minimálního času (=makespan) tak, aby byly provedeny všechny úlohy
- **Rozvrhování operátorů jako barvení grafu**
 - vrchol: úloha
 - hrana: mezi úlohami, které potřebují stejného operátora
 - barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy
 - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu
= existuje barvení s daným počtem barev
 - makespan = chromatické číslo grafu

Příklad: plánování schůzek

Vytvoř rozvrh pro 5 schůzek se 4 lidmi

- schůzka = úloha, člověk = operátor
- všechny schůzky trvají jednu hodinu

	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1

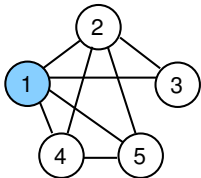


Můžeme vybrat buď
úlohu 1 nebo úlohu 2

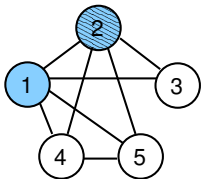
Např. vybereme 1 a obarvíme
barvou 1

Rozvrhování operátorů

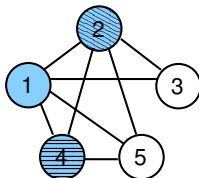
Příklad: plánování schůzek (dokončení)



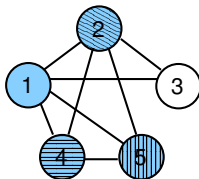
Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro uzel 3
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5
Vyber 5 na obarvení



V posledním kroku obarvi 3
stejnou barvou jako 4
⇒ celkem 4 barvy, tj. *makespan*=4

Cvičení

Jakou grafovou reprezentaci mají následující problémy? Problémy vyřešte a ukažte postup řešení.

- ① Určete, ve kterých místnostech se mají konat schůzky tak, aby byla v každé místnosti nejvýše jedna schůzka a přitom byly schůzky organizovány v uvedených termínech.

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,3,5)	(2,4)	(1,2)	(3,4)	(1,5)

Nápověda: problém přiřazení místností

- ② Stroje v továrně mají být využívány uvedenými operacemi v následujících časových intervalech. Určete, kolik strojů je třeba a které stroje budou využívat jednotlivé operace v případě, že stroj může zpracovávat nejvýše jednu operaci.

operace	A	B	C	D	E	F
interval	1-3	2-4	1-4	4-5	5-8	5-6

Nápověda: rezervační problém

Cvičení (pokračování)

- 3 Určete, kolik času je potřeba pro realizaci operací na uvedených strojích, jestliže může být na každém stroji zpracovávána nejvýše jedna operace.

operace	1	2	3	4	5	6	7
stroje	A,B	C,D	A,C,E	E,F	E,G	D,G	G

Nápověda: rozvrhování operátorů