

## PB165 Grafy a sítě: 6. Grafová reprezentace

# Shrnutí

## Minule

- Rozvrhování: optimální přiřazení zdrojů v čase množině úloh
- Grafová reprezentace: orientované vrcholově ohodnocené grafy
  - precedenční podmínky
  - multi-operační rozvrhování a disjunktivní grafová reprezentace

## Dnes

- orientované vrcholově/hranově ohodnocené grafy
- plánování jako barvení grafu

# Obsah přednášky

- 1 Ohodnocené grafy
  - Problém obchodního cestujícího
  - Doba na dopravu
  - Plánování na počítačové síti
- 2 Barvení grafu
  - Popis problému a jednoduché řešení
  - Přiřazení místností
  - Rezervační problém
  - Rozvrhování operátorů

# Problém obchodního cestujícího

- Doba na nastavení (setup time)  $s_{kj}$ 
  - $s_{kj}$  čas nutný pro provádění úlohy  $k$  po úloze  $j$
  - problém  $1|s_{jk}|C_{\max}$
- Problém obchodního cestujícího
  - obchodní cestující musí projet všechna města tak, aby celková ujetá vzdálenost (resp. doba cesty) byla minimální a každé město projel právě jednou
- Grafová reprezentace
  - (orientovaný) hranově ohodnocený graf
  - vrchol = město
  - (orientovaná) hrana z  $A$  do  $B$  = přímá cesta z  $A$  do  $B$ 
    - hrany mohou být orientované, pokud chceme uvažovat různou náročnost v opačných směrech cesty
  - ohodnocení hrany z  $A$  do  $B$  = doba nutná na cestu z  $A$  do  $B$
- **Problém obchodního cestujícího =  $1|s_{jk}|C_{\max}$**

# Doba na dopravu

- Multi-operační rozvrhování

- úloha

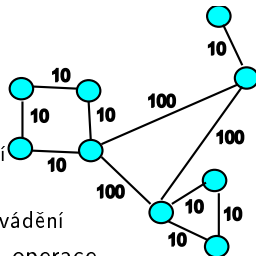
- skládá z několika operací
    - může/nemusí být určeno jejich pořadí

- operace má zadáno

- dobu provádění, konkrétní stroj k provádění
  - stroj: na každém stroji maximálně jedna operace
  - doba na dopravu (transportation time)  $t_{hl}$  mezi stroji  $h$  a  $l$ 
    - kapacita cest mezi stroji neomezená
  - cíl: realizovat všechny operace všech úloh při minimalizaci času dokončení všech úloh

- Grafová reprezentace

- orientovaný hranově ohodnocený graf
  - vrchol: stroj
  - hrana: pokud lze přejít přímo z jednoho stroje na druhý
  - ohodnocení hrany: doba na dopravu z jednoho stroje na druhý

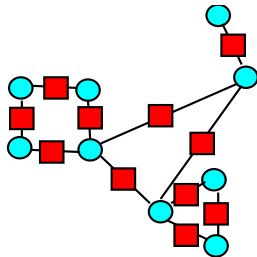
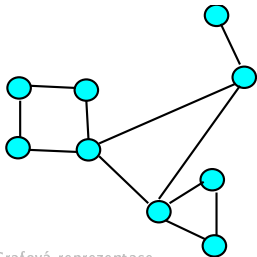


# Plánování na počítačové síti

- Stroj: počet procesorů
- Úlohy prováděny na jednom uzlu počítačové sítě
  - vyžadují několik procesorů
- Úlohy potřebují k výpočtu data
  - data dané velikosti na jednom nebo více uzlech
  - data je nutné přenést na uzel, kde se úloha bude počítat
  - realita: data jsou často zreplikována na několika uzlech
- Linka:
  - **propustnost** = kapacita linky
  - **latence** = doba nutná na přenos dat po lince
- Cíl: realizovat všechny úlohy
  - úlohy musí mít dostatek procesorů
  - data musí ležet v době výpočtu na uzlu, kde se počítá úloha
  - je nutné plánovat i přenosy dat tak, aby bylo možné data přenést vzhledem k latenci i propustnosti linek na cestě

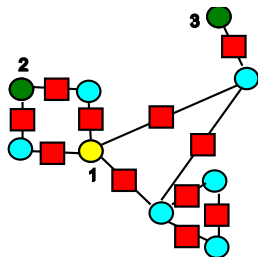
# Počítačová síť: grafová reprezentace

- Vrcholově ohodnocený neorientovaný graf
- Vrchol: stroj nebo linka
- Ohodnocení vrcholu-stroje: počet procesorů
- Ohodnocení vrcholu-linky: propustnost linky
  - linka je chápána jako zdroj, jehož kapacita odpovídá propustnosti
  - doba trvání úlohy na lince odpovídá latenci
- Hrany: pokud jsou stroje A a B přímo spojeny linkou C, pak existují hrany AC a BC

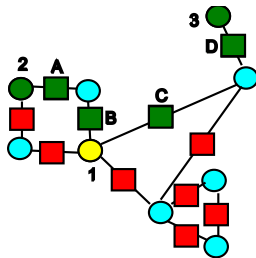


## Plánování úlohy na počítačové síti: příklad

- Úloha naplánována k provádění na uzlu 1
- Data na uzlech 2 a 3



- Data jsou přenesena přes D,C a A,B
- Kapacita linky/zdrojů A,B,C,D musí mít v daném čase postačující propustnost
- Celková doba přenostu do 1:  
 $\max(\text{latenceA} + \text{latenceB}, \text{latenceD} + \text{latenceC})$



Základní otázka: je možné **nyní** takovouto úlohu naplánovat?  
A je možné ji naplánovat při modifikaci cest pro přenosy?



# Barvení grafu

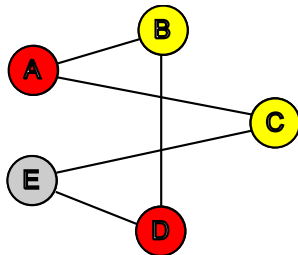
## Problém barvení grafu

- Je možné obarvit vrcholy grafu s použitím  $n$  barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou?

## Chromatické číslo grafu

- Minimální počet barev  $n$  nutný k obarvení grafu tak, by žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou.

NP-úplný problém



## Barvení grafu a rozvrhování

- Rezervační problémy
- Přřazení místností
- Rozvrhování operátorů

# Heuristiky pro barvení grafu se saturací

- **Stupeň uzlu**
  - počet hran spojených s uzlem
- **Úroveň saturace**
  - počet různých barev spojených s uzlem
- Intuice
  - obarvi uzly s vyšším stupněm dříve
  - obarvi uzly s vyšší úrovní saturace dříve
- **Algoritmus**
  - 1 uspořádej uzly v klesajícím pořadí podle jejich stupně
  - 2 použij barvu 1 pro první uzel
  - 3 vyber neobarvený uzel s maximální úrovní saturace v případě volby z nich vyber uzel s maximálním stupněm v neobarveném podgrafu
  - 4 obarvi vybraný uzel s nejmenší možnou barvou
  - 5 jestliže jsou všechny uzly obarveny STOP jinak běž na krok 3

# Přřazení místností

- **Problém přřazení místností**

- úloha = předmět s několika schůzkami týdně, zdroj = místnost
- dva předměty nesmí být zároveň vyučovány ve stejné místnosti
- všechny schůzky předmětu musí být vyučovány ve stejné místnosti

rozvrh: přřazení místnosti každému předmětu

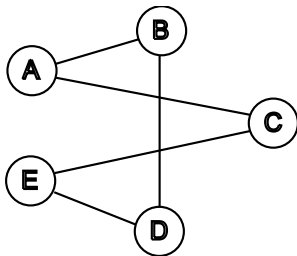
možné řešení:

- nalezení rozvrhu s minimálním počtem místností
- nalezení rozvrhu vzhledem k danému počtu místností
- **Přřazení místností jako barvení grafu**
  - vrchol: předmět
  - barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti
  - hrana: mezi předměty vyžadujícími stejný čas výuky (musí mít různé místnosti a také různé barvy)

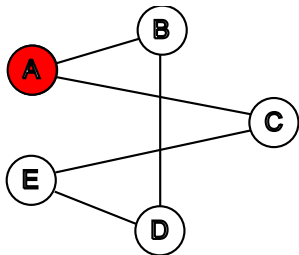
## Přřazení místností: příklad

Kolik místností je třeba k rozvrhování těchto předmětů?

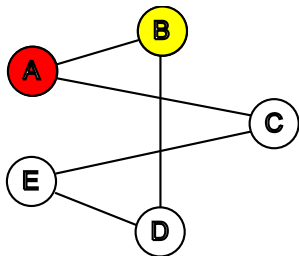
předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,4)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(2,5)
stupeň	2	2	2	2	2



# Přřazení místností: příklad (pokračování)

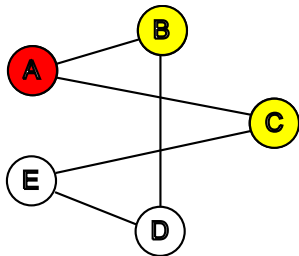


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	1	1	0	0
stupeň neob.	-	1	1	2	2

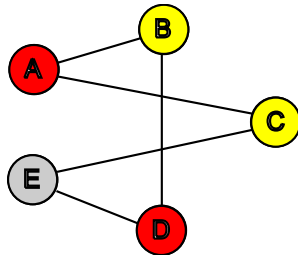
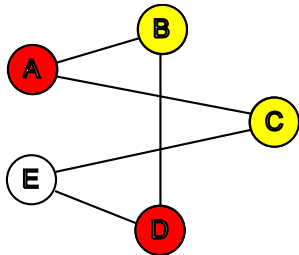


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	1	1	0
stupeň neob.	-	-	1	1	2

# Přřazení místností: příklad (dokončení)

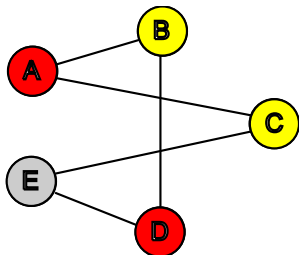


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	-	1	1
stupeň neob.	-	-	-	1	1



## Přřazení místností: příklad (řešení)

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,4)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(2,5)
místnost	červená	žlutá	žlutá	červená	šedá



čas/předmět	A	B	C	D	E
1	+	+	-	-	-
2	-	-	+	-	+
3	-	+	-	+	-
4	+	-	+	-	-
5	-	-	-	+	+

# Rezervační problém

- Příklady
  - rezervace aut
  - rezervace pokojů v hotelu
  - rezervace strojů v továrně
- Určen časový interval pro každou rezervaci
  - $p_j = r_j - d_j$
  - $p_j$  doba trvání úlohy
  - $r_j$  termín dostupnosti
  - $d_j$  termín dokončení
- Každá rezervace vyžaduje zdroj (auto, pokoj, stroj)
- Možné řešení
  - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací
  - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů



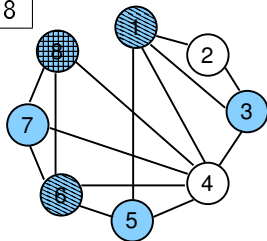
## Rezervační problém jako barvení grafu

- Graf
  - vrchol: rezervace
  - hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase
- Barva vrcholu: koresponduje vybranému zdroji
  - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací  
= chromatické číslo
  - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů  
= existuje barvení s daným počtem barev

- Příklad:

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8
$r_j$	0	1	1	3	4	5	6	6
$d_j$	5	3	4	7	6	7	9	8

Odovídající problém barvení grafu:



# Rozvrhování operátorů

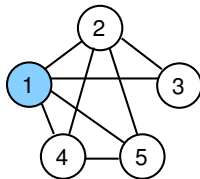
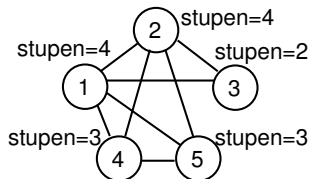
- Zadáno několik různých operátorů
- Úloha potřebuje jeden nebo více specifických operátorů
- Úlohy vyžadující stejného operátora nemohou běžet zároveň
- Jednotková doba trvání úlohy
- Možné řešení:
  - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu
  - nalezení minimálního času (=makespan) tak, aby byly provedeny všechny úlohy
- Rozvrhování operátorů jako barvení grafu
  - vrchol: úloha
  - hrana: mezi úlohami, které potřebují stejného operátora
  - barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy
    - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu  
= existuje barvení s daným počtem barev
    - makespan = chromatické číslo grafu

## Příklad: plánování schůzek

Vytvoř rozvrh pro 5 schůzek se 4 lidmi

- schůzka = úloha, člověk = operátor
- všechny schůzky trvají jednu hodinu

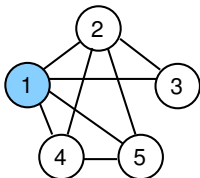
	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1



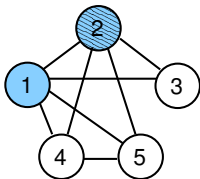
Můžeme vybrat buď  
úlohu 1 nebo úlohu 2

Např. vybereme 1 a obarvíme  
barvou 1

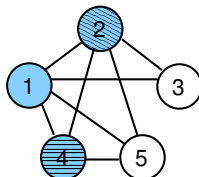
## Příklad: plánování schůzek (dokončení)



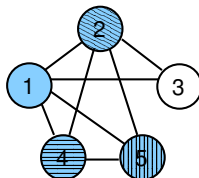
Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy  
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly  
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro uzel 3  
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5  
Vyber 5 na obarvení



V posledním kroku obarvi 3  
stejnou barvou jako 4  
⇒ celkem 4 barvy, tj. *makespan*=4

## Cvičení

Jakou grafovou reprezentaci mají následující problémy? Problémy vyřešte a ukažte postup řešení.

- 1 Určete, ve kterých místnostech se mají konat schůzky tak, aby byla v každé místnosti nejvýše jedna schůzka a přitom byly schůzky organizovány v uvedených termínech.

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,3,5)	(2,4)	(1,2)	(3,4)	(1,5)

Nápověda: problém přiřazení místností

- 2 Stroje v továrně mají být využívány uvedenými operacemi v následujících časových intervalech. Určete, kolik strojů je třeba a které stroje budou využívat jednotlivé operace v případě, že stroj může zpracovávat nejvýše jednu operaci.

operace	A	B	C	D	E	F
interval	1-3	2-4	1-4	4-5	5-8	5-6

Nápověda: rezervační problém

## Cvičení (pokračování)

- 3 Určete, kolik času je potřeba pro realizaci operací na uvedených strojích, jestliže může být na každém stroji zpracovávána nejvýše jedna operace.

operace	1	2	3	4	5	6	7
stroje	A,B	C,D	A,C,E	E,F	E,G	D,G	G

Nápověda: rozvrhování operátorů