kterou napsal J. Sommer na jeho knihu *Základy geometrie* v Göttingen v říjnu 1899.[6] Sommer Hilberta kritizoval za to, že archimédovský axiom uvedl jako axiom spojitosti – což podle něj nebylo pro takové účely adekvátní:

> Archimédův axiom nás ve skutečnosti nezbavuje nutnosti zavést explicitně axiom spojitosti, pouze činí zavedení tohoto axiomu možným. Takže pro celou oblast geometrie není axiomatický systém profesora Hilberta dostatečný. Například ... by bylo nemožné geometricky rozhodnout, zda přímka, která má některé své body uvnitř a některé vně kruhu, tento kruh protne. (Sommer, 1900, 291)

Hilbert se s touto výtkou v důsledku vypořádal prostřednictvím svého nového axiomu úplnosti. Není jasné, proč tento axiom formuloval jako tvrzení o maximálních modelech, a ne nějakým matematicky konvenčnějším způsobem (jako je existence nejmenší horní meze pro každou omezenou množinu).

Tentýž rok měl Hilbert na Mezinárodním kongresu matematiků konaném v Paříži svou slavnou přednášku „Matematické problémy". Jako svůj druhý problém předložil důkaz konzistence svých axiomů pro reálná čísla. Současně zdůraznil tři předpoklady stojící v základu jeho stanoviska: užitečnost axiomatické metody, jeho přesvědčení, že každý dobře formulovaný matematický problém může být vyřešen, a jeho přesvědčení, že konzistence množiny S axiomů implikuje existenci modelu pro S (1900b, 264–266). Když tohle přednášel, nebyl jeho názor, že konzistence implikuje existenci, ničím víc než článkem víry – i když článkem, ke kterému se hlásil i Poincaré (1905, 819). Gödel však měl v roce 1930 tento článek víry přetvořit ve větu, dokonce v jednu verzi své věty o úplnosti pro logiku prvního řádu.

V roce 1904, když Hilbert přednášel na Mezinárodním kongresu matematiků v Heidelbergu, se stále snažil postavit na pevný základ soustavu reálných čísel. Jako první krok se chystal zjednat základ pro celá kladná čísla. Když probíral Fregovy výsledky, poprvé se v tisku zabýval paradoxy logiky a teorie množin. Pro Hilberta z těchto paradoxů plynulo, že „koncepce a výzkumné metody logiky chápané v tradičním smyslu nedosahují standardů přesnosti, jakou předpokládá teorie množin" (1905, 175). Způsobem, kterým chtěl tuto situaci napravovat, se ostře odlišoval od Frega:

[6] Názor, že Hilbert mohl být k zavedení axiomu spojitosti naveden Sommerem, pochází od Jongsmy (1975, 5–6).

> Když se ale podíváme pozorně, vidíme, že v tradičním přístupu k zákonům logiky jsou již použity některé základní pojmy z aritmetiky, jako je pojem množiny a do jisté míry i pojem čísla. Stojíme tudíž před dilematem, a abychom se vyhnuli paradoxům, musíme do jisté míry současně rozvíjet jak zákony logiky, tak aritmetiky. (1905, 176)

Toto pohlcení části aritmetiky logikou přetrvávalo i v Hilbertových pozdějších pracích.

Hilbert se omluvil, že nepředvede více než náznak toho, jak by mělo takové současné rozvíjení logiky a aritmetiky postupovat, avšak poprvé použil formální jazyk. V rámci tohoto jazyka měl kvantifikátory toho druhu, jaký používali Peirce a Schröder, i když tyto autory explicitně necitoval. Výraz „$A(x)$ pro nějaké x" totiž považoval za pouhou zkratku za

$$A(1) \text{ o. } A(2) \text{ o. } A(3) \text{ o. } \ldots,$$

kde o. znamená „oder" (nebo), a analogicky pro univerzální kvantifikátor s použitím „und" (a) (1905, 178). Podobně následoval Peirce a Schrödera (stejně jako geometrickou tradici) v tom, že bral obor svých kvantifikátorů za *pevný*. Hilbertovým cílem bylo ukázat konzistenci jeho axiomů pro kladná celá čísla (Peanovy postuláty bez principu matematické indukce). To uskutečnil tak, že našel kombinatorickou vlastnost, kterou měly všechny teorémy, avšak neměla ji kontradikce. Tohle vyznačilo počátek toho, z čeho se měla o deset let později stát jeho teorie důkazů.

Hilbertovo pojetí matematické logiky kolem roku 1904 tak obsahovalo určité prvky logiky prvního řádu, nikoli však jiné. S logikou prvního řádu, jak byla nakonec formulována, se především rozcházelo jeho užívání nekonečných formulí a jeho omezení kvantifikátorů na pevný obor. Když v roce 1918 začal znovu publikovat o logice, jeho základní pohled se nezměnil, byl jenom doplněn o *Principia mathematica*.