IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 10 — Řešení

Upozornění

Vzorová řešení dostáváte k dispozici, abyste mohli zkontrolovat správnost svých řešení. Můžete je použít i jako návody k řešení jednotlivých příkladů tak, že je budete číst po částech a budete se snažit další krok provést vždy sami. Příklady ztratí veškerý svůj smysl, pokud se je budete učit jako básničku. Snažte se nad nimi přemýšlet a vyřešit je sami, než se podíváte do vzorových řešení.

Téma

Induktivní definice. Výpočet programu v deklarativním jazyce, výpočetní krok. Dokazování vlastností programů.

Příklad 1.

Uvažme deklaraci obsahující rovnici $g(x, y) = \textbf{if } y \textbf{ then } x * g(x, y - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1}$.

a) Dokažte, že $g(\mathbf{2}, \mathbf{3}) \mapsto^* \mathbf{8}$.

b) Dokažte, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí $g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{z}$, kde $\mathbf{m} \equiv m$, $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{z} \equiv m^n$.

Řešení

a) Při výpočtu se budeme striktně držet definice kroku výpočtu.

$$
\begin{aligned}
& g(\mathbf{2}, \mathbf{3}) \\
& \mapsto \textbf{if } \mathbf{3} \textbf{ then } \mathbf{2} * g(\mathbf{2}, \mathbf{3} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1} \\
& \mapsto \mathbf{2} * g(\mathbf{2}, \mathbf{3} - \mathbf{1}) \\
& \mapsto \mathbf{2} * g(\mathbf{2}, \mathbf{2}) \\
& \mapsto \mathbf{2} * \textbf{if } \mathbf{2} \textbf{ then } \mathbf{2} * g(\mathbf{2}, \mathbf{2} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1} \\
& \mapsto \mathbf{2} * (\mathbf{2} * g(\mathbf{2}, \mathbf{2} - \mathbf{1})) \\
& \mapsto \mathbf{2} * (\mathbf{2} * g(\mathbf{2}, \mathbf{1})) \\
& \mapsto \mathbf{2} * (\mathbf{2} * \textbf{if } \mathbf{1} \textbf{ then } \mathbf{2} * g(\mathbf{2}, \mathbf{1} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1}) \\
& \mapsto \mathbf{2} * (\mathbf{2} * (\mathbf{2} * g(\mathbf{2}, \mathbf{1} - \mathbf{1}))) \\
& \mapsto \mathbf{2} * (\mathbf{2} * (\mathbf{2} * g(\mathbf{2}, \mathbf{0}))) \\
& \mapsto \mathbf{2} * (\mathbf{2} * (\mathbf{2} * \textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } \mathbf{2} * g(\mathbf{2}, \mathbf{0} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1})) \\
& \mapsto \mathbf{2} * (\mathbf{2} * (\mathbf{2} * \mathbf{1})) \\
& \mapsto \mathbf{2} * (\mathbf{2} * \mathbf{2}) \\
& \mapsto \mathbf{2} * \mathbf{4} \\
& \mapsto \mathbf{8}
\end{aligned}
$$

b) Protože se první argument v rovnici nemění, použijeme k důkazu techniku „fixace parametru“. Buď $m \in \mathbb{N}_0$ libovolné ale pro další úvahy pevné. Indukcí vzhledem k n dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{z}$, kde $\mathbf{m} \equiv m$, $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{z} \equiv m^n$.

Základní krok: $n = 0$. Pak

$$
\begin{aligned}
& g(\mathbf{m}, \mathbf{0}) \\
& \mapsto \textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } \mathbf{m} * g(\mathbf{m}, \mathbf{0} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1} \\
& \mapsto \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Indukční krok. Nechť $\mathbf{k} \equiv n+1$. Platí

$$\begin{aligned}&g(\mathbf{m},\mathbf{k})\\ &\mapsto \textbf{if } \mathbf{k} \textbf{ then } \mathbf{m} * g(\mathbf{m},\mathbf{k}-\mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1}\\ &\mapsto \mathbf{m} * g(\mathbf{m},\mathbf{k}-\mathbf{1})\\ &\mapsto \mathbf{m} * g(\mathbf{m},\mathbf{u})\end{aligned}$$

kde $\mathbf{u} \equiv n$. Podle I.P. platí $g(\mathbf{m},\mathbf{u}) \mapsto^* \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} \equiv m^n$. Proto

$$\begin{aligned}&\mathbf{m} * g(\mathbf{m},\mathbf{u})\\ &\mapsto^* \mathbf{m} * \mathbf{v}\\ &\mapsto \mathbf{w}\end{aligned}$$

kde $\mathbf{w} \equiv m * m^n = m^{n+1}$.

Příklad 2.

Uvažme deklaraci obsahující rovnici

$$g(x,y) = \textbf{if } x \textbf{ then } (\textbf{if } y \textbf{ then } (\mathbf{2} + g(x, y-\mathbf{1})) + g(x-\mathbf{1}, y) \textbf{ else } x) \textbf{ else } y$$

Dokažte, že pro každá $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí $g(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{z}$, kde $\mathbf{m} \equiv m$, $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{z} \equiv z \geq m+n$.

Řešení

Protože se v dokazované vlastnosti vyskytuje součet argumentů, může být výhodné vést indukci také k součtu argumentů. Indukcí vzhledem k $i \in \mathbb{N}_0$ dokážeme následující tvrzení: Jestliže $i = m+n$ kde $m, n \in \mathbb{N}_0$, pak $g(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{z}$, kde $\mathbf{m} \equiv m$, $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{z} \equiv z \geq m+n$.

Základní krok: $i = 0$. Pak $m = n = 0$ a platí

$$\begin{aligned}&g(\mathbf{0},\mathbf{0})\\ &\mapsto \textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } (\textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } (\mathbf{2} + g(\mathbf{0}, \mathbf{0}-\mathbf{1})) + g(\mathbf{0}-\mathbf{1}, \mathbf{0}) \textbf{ else } \mathbf{0}) \textbf{ else } \mathbf{0}\\ &\mapsto \mathbf{0}\end{aligned}$$

Jelikož $0 \geq 0+0$, tvrzení platí.
Indukční krok. Nechť $i+1 = m+n$, kde $m, n \in \mathbb{N}_0$. Musíme rozlišit tři možnosti.
Jestliže $m = 0$, pak

$$\begin{aligned}&g(\mathbf{0},\mathbf{n})\\ &\mapsto \textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } (\textbf{if } \mathbf{n} \textbf{ then } (\mathbf{2} + g(\mathbf{0}, \mathbf{n}-\mathbf{1})) + g(\mathbf{0}-\mathbf{1}, \mathbf{n}) \textbf{ else } \mathbf{0}) \textbf{ else } \mathbf{0}\\ &\mapsto \mathbf{n}\end{aligned}$$

a jelikož $n \geq 0+n$, tvrzení platí.
Jestliže $m > 0$ a $n = 0$, pak

$$\begin{aligned}&g(\mathbf{m},\mathbf{0})\\ &\mapsto \textbf{if } \mathbf{m} \textbf{ then } (\textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } (\mathbf{2} + g(\mathbf{m}, \mathbf{0}-\mathbf{1})) + g(\mathbf{m}-\mathbf{1}, \mathbf{0}) \textbf{ else } \mathbf{m}) \textbf{ else } \mathbf{0}\\ &\mapsto \textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } (\mathbf{2} + g(\mathbf{m}, \mathbf{0}-\mathbf{1})) + g(\mathbf{m}-\mathbf{1}, \mathbf{0}) \textbf{ else } \mathbf{m}\\ &\mapsto \mathbf{m}\end{aligned}$$

a jelikož $m \geq m+0$, tvrzení platí.

Jestliže $m > 0$ a $n > 0$, pak

$$
\begin{aligned}
&g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \\
&\mapsto \textbf{if m then (if n then } (\mathbf{2} + g(\mathbf{m}, \mathbf{n} - \mathbf{1})) + g(\mathbf{m} - \mathbf{1}, \mathbf{n}) \textbf{ else m) else n} \\
&\mapsto \textbf{if n then } (\mathbf{2} + g(\mathbf{m}, \mathbf{n} - \mathbf{1})) + g(\mathbf{m} - \mathbf{1}, \mathbf{n}) \textbf{ else m} \\
&\mapsto (\mathbf{2} + g(\mathbf{m}, \mathbf{n} - \mathbf{1})) + g(\mathbf{m} - \mathbf{1}, \mathbf{n}) \\
&\mapsto (\mathbf{2} + g(\mathbf{m}, \mathbf{u})) + g(\mathbf{m} - \mathbf{1}, \mathbf{n})
\end{aligned}
$$

kde $\mathbf{u} \equiv n - 1$.
Podle I.P. platí $g(\mathbf{m}, \mathbf{u}) \mapsto^* \mathbf{p}$, kde $\mathbf{p} \equiv p \geq m + n - 1$. Proto

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{2} + g(\mathbf{m}, \mathbf{u})) + g(\mathbf{m} - \mathbf{1}, \mathbf{n}) \\
&\mapsto^* (\mathbf{2} + \mathbf{p}) + g(\mathbf{m} - \mathbf{1}, \mathbf{n}) \\
&\mapsto \mathbf{r} + g(\mathbf{m} - \mathbf{1}, \mathbf{n}) \\
&\mapsto \mathbf{r} + g(\mathbf{v}, \mathbf{n})
\end{aligned}
$$

kde $\mathbf{r} \equiv r = 2 + p$ a $\mathbf{v} \equiv m - 1$. Jelikož $p \geq m + n - 1$, platí $r \geq m + n + 1$.
Podle I.P. dále $g(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{q}$, kde $\mathbf{q} \equiv q \geq m - 1 + n$. Proto

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r} + g(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \\
&\mapsto^* \mathbf{r} + \mathbf{q} \\
&\mapsto \mathbf{t}
\end{aligned}
$$

kde $\mathbf{t} \equiv r + q$. Jelikož $r \geq m + n + 1$ a $q \geq m - 1 + n$, platí

$$r + q \geq (m + n + 1) + (m - 1 + n) = 2(m + n) \geq m + n$$

Příklad 3.

Uvažme deklaraci obsahující rovnice

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x + \textbf{if } \mathbf{2} * x \textbf{ then } h(x - \mathbf{1}) + f(x - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{3} \\
h(x) &= \textbf{if } x \textbf{ then } h(x - \mathbf{1}) * f(x - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Zapište výpočet výrazu $f(\mathbf{2})$ jako posloupnost kroků výpočtu.

Řešení

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{2}) \\
&\mapsto \mathbf{2} \ + \ \textbf{if } \mathbf{2} * \mathbf{2} \textbf{ then } h(\mathbf{2} - \mathbf{1}) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{3} \\
&\mapsto \mathbf{2} \ + \ \textbf{if } \mathbf{4} \textbf{ then } h(\mathbf{2} - \mathbf{1}) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{3} \\
&\mapsto \mathbf{2} + (h(\mathbf{2} - \mathbf{1}) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1})) \\
&\mapsto \mathbf{2} + (h(\mathbf{1}) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1})) \\
&\mapsto \mathbf{2} + ((\textbf{if } \mathbf{1} \textbf{ then } h(\mathbf{1} - \mathbf{1}) * f(\mathbf{1} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1}) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1})) \\
&\mapsto \mathbf{2} + ((h(\mathbf{1} - \mathbf{1}) * f(\mathbf{1} - \mathbf{1})) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1})) \\
&\mapsto \mathbf{2} + ((h(\mathbf{0}) * f(\mathbf{1} - \mathbf{1})) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1})) \\
&\mapsto \mathbf{2} + (((\textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } h(\mathbf{0} - \mathbf{1}) * f(\mathbf{0} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1}) * f(\mathbf{1} - \mathbf{1})) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1})) \\
&\mapsto \mathbf{2} + ((\mathbf{1} * f(\mathbf{1} - \mathbf{1})) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1})) \\
&\mapsto \mathbf{2} + ((\mathbf{1} * f(\mathbf{0})) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1})) \\
&\mapsto \mathbf{2} + ((\mathbf{1} * (\mathbf{0} + \textbf{if } \mathbf{2} * \mathbf{0} \textbf{ then } h(\mathbf{0} - \mathbf{1}) + f(\mathbf{0} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{3})) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1})) \\
&\mapsto \mathbf{2} + ((\mathbf{1} * (\mathbf{0} + \textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } h(\mathbf{0} - \mathbf{1}) + f(\mathbf{0} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{3})) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1})) \\
&\mapsto \mathbf{2} + ((\mathbf{1} * (\mathbf{0} + \mathbf{3})) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mapsto \mathbf{2} + ((\mathbf{1} * \mathbf{3}) + f(\mathbf{2} - \mathbf{1}))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + f(\mathbf{2} - \mathbf{1}))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + f(\mathbf{1}))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + \textbf{if } \mathbf{2} * \mathbf{1} \textbf{ then } h(\mathbf{1} - \mathbf{1}) + f(\mathbf{1} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{3}))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + \textbf{if } \mathbf{2} \textbf{ then } h(\mathbf{1} - \mathbf{1}) + f(\mathbf{1} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{3}))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + (h(\mathbf{1} - \mathbf{1}) + f(\mathbf{1} - \mathbf{1}))))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + (h(\mathbf{0}) + f(\mathbf{1} - \mathbf{1}))))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + ((\textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } h(\mathbf{0} - \mathbf{1}) * f(\mathbf{0} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1}) + f(\mathbf{1} - \mathbf{1}))))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + (\mathbf{1} + f(\mathbf{1} - \mathbf{1}))))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + (\mathbf{1} + f(\mathbf{0}))))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + (\mathbf{1} + (\mathbf{0}\ +\ \textbf{if } \mathbf{2} * \mathbf{0} \textbf{ then } h(\mathbf{0} - \mathbf{1}) + f(\mathbf{0} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{3}))))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + (\mathbf{1} + (\mathbf{0}\ +\ \textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } h(\mathbf{0} - \mathbf{1}) + f(\mathbf{0} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{3}))))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + (\mathbf{1} + (\mathbf{0}\ +\ \mathbf{3}))))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + (\mathbf{1} + \mathbf{3})))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + (\mathbf{1} + \mathbf{4}))\\
&\mapsto \mathbf{2} + (\mathbf{3} + \mathbf{5})\\
&\mapsto \mathbf{2} + \mathbf{8}\\
&\mapsto \mathbf{10}
\end{aligned}
$$

Příklad 4.

Uvažme deklaraci obsahující rovnice

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \textbf{if } x \textbf{ then } x + h(x - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{0}\\
h(x) &= \textbf{if } x \textbf{ then } x + f(x - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $f(\mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{m}$, kde $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{m} \equiv \sum_{i=0}^{n} i$.

Řešení

Indukcí vzhledem k n dokážeme následující silnější tvrzení: Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $f(\mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{m}$ a $h(\mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{m}$, kde $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{m} \equiv \sum_{i=0}^{n} i$.

Základní krok: $n = 0$. Platí

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{0})\\
&\mapsto \textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } \mathbf{0} + h(\mathbf{0} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{0}\\
&\mapsto \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

a podobně

$$
\begin{aligned}
&h(\mathbf{0})\\
&\mapsto \textbf{if } \mathbf{0} \textbf{ then } \mathbf{0} + f(\mathbf{0} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{0}\\
&\mapsto \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Indukční krok: Nechť $\mathbf{k} \equiv n + 1$. Potom platí

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{k})\\
&\mapsto \textbf{if } \mathbf{k} \textbf{ then } \mathbf{k} + h(\mathbf{k} - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{0}\\
&\mapsto \mathbf{k} + h(\mathbf{k} - \mathbf{1})\\
&\mapsto \mathbf{k} + h(\mathbf{w})
\end{aligned}
$$

kde $\mathbf{w} \equiv n$. Podle I.P. platí $h(\mathbf{w}) \mapsto^* \mathbf{p}$, kde $\mathbf{p} \equiv \sum_{i=0}^{n} i$. Proto

$\mathbf{k} + h(\mathbf{w})$
$\mapsto^* \mathbf{k} + \mathbf{p}$
$\mapsto \mathbf{q}$

kde $\mathbf{q} \equiv n + 1 + \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n+1} i$.
Celkem jsme tedy dokázali, že $f(\mathbf{k}) \mapsto^* \mathbf{q}$, kde $\mathbf{q} \equiv \sum_{i=0}^{n+1} i$.
Podobně platí

$h(\mathbf{k})$
$\mapsto$ **if k then** $\mathbf{k} + f(\mathbf{k} - \mathbf{1})$ **else 0**
$\mapsto \mathbf{k} + f(\mathbf{k} - \mathbf{1})$
$\mapsto \mathbf{k} + f(\mathbf{w})$

kde $\mathbf{w} \equiv n$. Podle I.P. platí $f(\mathbf{w}) \mapsto^* \mathbf{p}$, kde $\mathbf{p} \equiv \sum_{i=0}^{n} i$. Proto

$\mathbf{k} + f(\mathbf{w})$
$\mapsto^* \mathbf{k} + \mathbf{p}$
$\mapsto \mathbf{q}$

kde $\mathbf{q} \equiv n + 1 + \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n+1} i$.
Celkem jsme tedy dokázali, že $h(\mathbf{k}) \mapsto^* \mathbf{q}$, kde $\mathbf{q} \equiv \sum_{i=0}^{n+1} i$.

Uvědomte si, proč jsme museli zesílit dokazované tvrzení: Abychom mohli dokázat tvrzení indukčního kroku pro funkci f, museli jsme využít indukční předpoklad pro funkci h. Abychom mohli dokázat tvrzení indukčního kroku pro funkci h, museli jsme využít indukční předpoklad pro funkci f. Nebylo proto možné tvrzení dokázat nejprve pro jednu a potom pro druhou funkci. Museli jsme současně dokazovat tvrzení o obou funkcích.