

2 Důkazové techniky, Indukce

Náš hlubší úvod do matematických formalismů pro informatiku začneme základním přehledem technik matematických důkazů. Z nich pro nás asi nejdůležitější je technika důkazů *matematickou indukcí*, která je svou podstatou velmi blízká počítačovým programům (jako iterace cyklů).



Stručný přehled lekce

- * Základní důkazové techniky: přímé, nepřímé a sporem. Důkazy „tehdy a jen tehdy“.
- * Důkazy matematickou indukcí, jejich variace a úskalí.
- * Metody zesílení tvrzení a rozšíření základu v indukci.

2.1 Přehled základních důkazových technik

- *Přímé odvození*. To je způsob, o kterém jsme se dosud bavili. □

- *Kontrapozice* (také *obrácením* či *nepřímý důkaz*). Místo věty

„Jestliže platí **předpoklady**, pak platí **závěr**.“

budeme dokazovat ekvivalentní větu

„Jestliže neplatí **závěr**, pak neplatí alespoň jeden z **předpokladů**.“ □

- *Důkaz sporem*. Místo věty

„Jestliže platí **předpoklady**, pak platí **závěr**.“

budeme dokazovat větu

„Jestliže platí **předpoklady** a platí **opak závěru**, pak platí opak jednoho z **předpokladů** (nebo platí jiné **zjevně nepravdivé tvrzení**).“ □

- *Matematická indukce*. Pokročilá technika. . .

Příklad důkazu kontrapozicí

Definice: *Prvočíslo* $p > 1$ nemá jiné dělitele než 1 a p .

Příklad 2.1. *na důkaz kontrapozicí (obrácením).*

Věta. *Jestliže p je prvočíslo větší než 2, pak p je liché.* □

Důkaz: *Obráceného tvrzení* – budeme tedy dokazovat, že je-li p sudé, pak p buď není větší než 2, nebo p není prvočíslo. Jsou dvě možnosti:

- $p \leq 2$. Pak p není větší než 2.
- $p > 2$. Pak $p = 2 \cdot k$ pro nějaké celé $k > 1$, tedy p není prvočíslo. □

Poznámka: Důkazy kontrapozicí pracují s *negací* (opakem) *předpokladů* a *závěru*. Je-li např. *závěr* komplikované tvrzení tvaru

„z toho, že z A a B plyne C vyplývá, že z A nebo C plyne A a B “,

není pouhou intuicí snadné zjistit, co je vlastně jeho negací. Jak uvidíme v pozdějších lekcích, užitím jednoduché induktivní metody lze podobná tvrzení negovat zcela *mechanicky*.

Příklady důkazu sporem

Příklad 2.2. Jiný přístup k Důkazu 2.1.

Věta. Jestliže p je prvočíslo větší než 2, pak p je liché. \square

Důkaz sporem: Necht' tedy p je prvočíslo větší než 2, které je sudé. Pak $p = 2 \cdot k$ pro nějaké $k > 1$, tedy p není prvočíslo, **spor** (s předpokladem, že p je prvočíslo). \square

Příklad 2.3.

Věta. Číslo $\sqrt{2}$ není racionální. \square

Důkaz sporem: Necht' tedy $\sqrt{2}$ je racionální, tj. necht' existují nesoudělná celá kladná čísla r, s taková, že $\sqrt{2} = r/s$. \square

- Pak $2 = r^2/s^2$, tedy $r^2 = 2 \cdot s^2$, proto r^2 je dělitelné dvěma. Z toho plyne, že i r je dělitelné dvěma (proč?). \square
- Jelikož r je dělitelné dvěma, je r^2 dělitelné dokonce čtyřmi, tedy $r^2 = 4 \cdot m$ pro nějaké m . Pak ale také $4 \cdot m = 2 \cdot s^2$, tedy $2 \cdot m = s^2$ a proto s^2 je dělitelné dvěma. \square
- Z toho plyne, že s je také dělitelné dvěma. Celkem dostáváme, že r i s jsou dělitelné dvěma, jsou tedy soudělná a to je **spor**. \square

„Nevíte-li, jak nějakou větu dokázat, zkuste důkaz sporem. . . “

2.2 Věty typu „tehdy a jen tehdy“

- Uvažujme nyní (v matematice poměrně hojně) věty tvaru
„Nechť platí předpoklady P. Pak tvrzení A platí *tehdy a jen tehdy*, platí-li tvrzení B.“□
- Příklady jiných formulací téže věty jsou:
 - * Za předpokladů P je tvrzení B *nutnou a postačující* podmínkou pro platnost tvrzení A.□
 - * Za předpokladů P je tvrzení A nutnou a postačující podmínkou pro platnost tvrzení B.□
 - * Nechť platí předpoklady P. Pak tvrzení A platí *právě tehdy* když platí tvrzení B.□
- Důkaz vět tohoto tvaru má vždy *dvě části(!)*. Je třeba dokázat:
 - * Jestliže platí předpoklady P a tvrzení A, pak platí tvrzení B.
 - * Jestliže platí předpoklady P a tvrzení B, pak platí tvrzení A.

2.3 Matematická indukce

- Jde o důkazovou techniku aplikovatelnou na tvrzení tohoto typu:

„Pro každé přirozené (celé) $n \geq k_0$ platí $T(n)$.“

Zde k_0 je nějaké pevné přir. číslo a $T(n)$ je tvrzení parametrizované čís. n . □

Příkladem je třeba tvrzení:

Pro každé $n \geq 0$ platí, že n přímek dělí rovinu nejvýše na $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ oblastí. □

- **Princip matematické indukce** říká (coby axiom), že k důkazu věty

„Pro každé přirozené (celé) $n \geq k_0$ platí $T(n)$.“

stačí ověřit platnost těchto dvou tvrzení:

- * $T(k_0)$ (tzv. **báze** neboli základ indukce)
- * *Pro každé $n \geq k_0$; jestliže platí $T(n)$,* (**indukční předpoklad**)
pak platí také $T(n+1)$. (**indukční krok**) □

- **Pozor, v tomto předmětu počítáme 0 za přirozené číslo!**

Příklady důkazů indukcí

Příklad 2.4. *Velmi jednoduchá a přímočará indukce.*

Věta. Pro každé $n \geq 1$ je stejná pravděpodobnost, že při současném hodu n kostkami bude výsledný součet sudý, jako, že bude lichý. \square

Důkaz: *Základ indukce* je zde zřejmý: Na jedné kostce (poctivé!) jsou tři lichá a tři sudá čísla, takže obě skupiny padají se stejnou pravděpodobností. \square

Indukční krok pro $n \geq 1$: Nechť p_n^s pravděpodobnost, že při hodu n kostkami bude výsledný součet sudý, a p_n^l je pravděpodobnost lichého. Podle indukčního předpokladu je $p_n^s = p_n^l = \frac{1}{2}$. \square

Hoďme navíc $(n + 1)$ -ní kostkou. Podle toho, zda na ní padne liché nebo sudé číslo, je pravděpodobnost celkového sudého součtu rovna

$$\frac{3}{6}p_n^l + \frac{3}{6}p_n^s = \frac{1}{2}$$

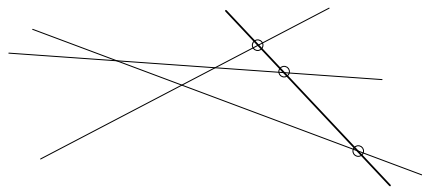
a stejně pro pravděpodobnost celkového lichého součtu. \square

Příklad 2.5. Ukázka důkazové „síly“ principu matematické indukce.

Věta. Pro každé $n \geq 0$ platí, že n přímek dělí rovinu nejvýše na

$$\frac{1}{2}n(n+1) + 1$$

oblastí.



Důkaz: □ Pro bázi indukce stačí, že 0 přímek dělí rovinu na jednu část. (Všimněte si také, že 1 přímka dělí rovinu na dvě části, jen pro lepší pochopení důkazu.)

Mějme nyní rovinu rozdělenou n přímkami na nejvýše $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ částí. Další, $(n+1)$ -ní přímka je rozdělena průsečíky s předchozími přímkami na nejvýše $n+1$ úseků a každý z nich oddělí novou část roviny. □ Celkem tedy bude rovina rozdělena našimi přímkami na nejvýše tento počet oblastí:

$$\frac{1}{2}n(n+1) + 1 + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2} \cdot 2(n+1) + 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + 1$$

□

Příklad 2.6. Další indukční důkaz rozepsaný v podrobných krocích.

Věta. Pro každé $n \geq 0$ platí $\sum_{j=0}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$. \square

Důkaz *indukcí* vzhledem k n .

- **Báze:** Musíme dokázat tvrzení $T(0)$, což je v tomto případě rovnost $\sum_{j=0}^0 j = \frac{0(0+1)}{2}$. Tato rovnost (zjevně) platí. \square
- **Indukční krok:** Musíme dokázat následující tvrzení:

Jestliže platí $\sum_{j=0}^i j = \frac{i(i+1)}{2}$ kde $i \geq 0$, pak platí $\sum_{j=0}^{i+1} j = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$. \square

Předpokládejme tedy, že $\sum_{j=0}^i j = \frac{i(i+1)}{2}$ a pokusme se dokázat, že pak také

$\sum_{j=0}^{i+1} j = \frac{(i+1)(i+1+1)}{2} = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$. To už plyne úpravou:

$$\sum_{j=0}^{i+1} j = \sum_{j=0}^i j + (i+1) = \frac{i(i+1)}{2} + (i+1) = \frac{i(i+1) + 2(i+1)}{2} = \frac{(i+1)(i+2)}{2} \square$$

Podle principu matematické indukce je celý důkaz hotov. \square

2.4 Komentáře k matematické indukci

Pro správné a úspěšné použití indukce v dokazování je vhodné si zapamatovat několik cenných rad:

- Základní trik všech důkazů matematickou indukcí je vhodná **reformulace** tvrzení $T(n+1)$ tak, aby se „odvolávalo“ na tvrzení $T(n)$.
 - * Dobře se vždy podívejte, v čem se liší tvrzení $T(n+1)$ od tvrzení $T(n)$. Tento „rozdíl“ budete muset v důkaze zdůvodnit. □
- Pozor, občas je potřeba „**zesílit**“ tvrzení $T(n)$, aby indukční krok správně „fungoval“. □
- Často se chybuje v důkazu indukčního kroku, neboť ten bývá většinou výrazně obtížnější než báze, ale o to **zrádnější** jsou chyby v samotné zdánlivě snadné bázi!
 - * Dejte si dobrý pozor, od které hodnoty $n \geq k_0$ je indukční krok univerzálně platný...

Příklad 2.7. *Když je nutno indukční krok zesílit...*

Věta. *Pro každé $n \geq 1$ platí*

$$s(n) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} < 1.$$

Důkaz: \square *Báze indukce* je zřejmá, neboť $\frac{1}{1 \cdot 2} < 1$.

Co však *indukční krok*? Předpoklad $s(n) < 1$ je sám o sobě „**příliš slabý**“ na to, aby bylo možno tvrdit $s(n+1) = s(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} < 1$. \square

Neznamená to ještě, že by tvrzení nebylo platné, jen je potřeba náš indukční předpoklad **zesílit**. Budeme dokazovat

„**Pro každé přirozené $n \geq 1$ platí $s(n) \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.**“ \square

To platí pro $n = 1$ a dále už úpravou jen dokončíme zesílený indukční krok:

$$\begin{aligned} s(n+1) &= s(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= 1 + \frac{-(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

\square

Rozšíření báze a předpokladu

Mimo zesilování tvrzení indukčního kroku jsme někdy okolnostmi nuceni i k **rozšiřování** samotné báze indukce a s ní indukčního předpokladu na více než jednu hodnotu parametru n . □

- Můžeme například předpokládat platnost (parametrizovaných) tvrzení $T(n)$ i $T(n + 1)$ **zároveň**, a pak odvozovat platnost $T(n + 2)$.

Toto lze samozřejmě zobecnit na jakýkoliv počet předpokládaných parametrů. □

- Můžeme dokonce předpokládat platnost tvrzení $T(j)$ **pro všechna** $j = k_0, k_0 + 1, \dots, n$ najednou a dokazovat $T(n + 1)$.

(Toto typicky využijeme v případech, kdy indukční krok „rozdělí“ problém $T(n + 1)$ na dvě menší části a z nich pak odvodí platnost $T(n + 1)$.) □

Fakt: Obě prezentovaná „rozšíření“ jsou v konečném důsledku jen speciálními instancemi základní matematické indukce; použité rozšířené možnosti pouze zjednodušují formální zápis důkazu.

Příklad 2.8. *Když je nutno rozšířit bázi a indukční předpoklad...*

Věta. *Nechť funkce f pro každé $n \geq 0$ splňuje vztah $f(n + 2) = 2f(n + 1) - f(n)$. Pokud platí $f(0) = 1$ a zároveň $f(1) = 2$, tak platí $f(n) = n + 1$ pro všechna přirozená $n \geq 0$. \square*

Důkaz: Už samotný pohled na daný vztah $f(n + 2) = 2f(n + 1) - f(n)$ naznačuje, že bychom měli **rozšířit indukční předpoklad** (a krok) zhruba takto:

*Pro každé $n \geq 0$; jestliže platí $T(n)$; neboli $f(n) = n + 1$, a **zároveň** platí $T(n + 1)$; $f(n + 1) = n + 2$, pak platí také $T(n + 2)$; $f(n + 2) = n + 3$.*

Báze indukce \rightarrow pozor, zde už musíme ověřit **dvě** hodnoty

$$f(0) = 0 + 1 = 1, \quad f(1) = 1 + 1 = 2. \square$$

Náš **indukční krok** tak nyní může využít celého rozšířeného předpokladu, znalosti hodnot $f(n)$ i $f(n + 1)$, pro ověření

$$f(n + 2) = 2f(n + 1) - f(n) = 2 \cdot (n + 1 + 1) - (n + 1) = n + 3 = n + 2 + 1.$$

\square

Jak by tento důkaz měl být formulován v „tradiční“ indukci? \square („Substitucí“.)

Závěrem malý „problém“

Příklad 2.9. *Aneb jak snadno lze v matematické indukci udělat chybu.*

Věta. („nevěta“)

V každém stádu o $n \geq 1$ koních mají všichni koně stejnou barvu. □

Důkaz indukcí vzhledem k n .

Báze: Ve stádu o jednom koni mají všichni koně stejnou barvu. □

Indukční krok: Necht' $S = \{K_1, \dots, K_{n+1}\}$ je stádo o $n+1$ koních. Dokážeme, že všichni koně mají stejnou barvu. Uvažme dvě menší stáda:

- $S' = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$
- $S'' = \{K_2, \dots, K_n, K_{n+1}\}$ □

Podle indukčního předpokladu mají všichni koně ve stádu S' stejnou barvu B' . Podobně všichni koně ve stádu S'' mají podle indukčního předpokladu stejnou barvu B'' . □ Dokážeme, že $B' = B''$, tedy že všichni koně ve stádu S mají stejnou barvu. To ale plyne z toho, že koně K_2, \dots, K_n patří jak do stáda S' , tak i do stáda S'' . □

Ale to už je podvod! Vidíte, kde?