

## FORMÁLNÍ JAZYKY A AUTOMATY I

### Řešení sady problémů 3.

1. Automat  $A_1$  obsahuje nedosažitelný stav  $q_9$ . Při aplikaci algoritmu pro minimalizaci konečného automatu obdržíme postupně následující třídy ekvivalentních stavů:

- $I = \{q_0, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_{10}\}$   
 $II = \{q_1, q_8\}$
- $I_1 = \{q_0, q_2\}$   
 $I_2 = \{q_3, q_4, q_6, q_{10}\}$   
 $I_3 = \{q_5, q_7\}$   
 $II = \{q_1, q_8\}$
- $I_1 = \{q_0, q_2\}$   
 $I'_2 = \{q_3\}$   
 $I''_2 = \{q_4, q_6\}$   
 $I'''_2 = \{q_{10}\}$   
 $I_3 = \{q_5, q_7\}$   
 $II = \{q_1, q_8\}$

Automat  $A_2$  neobsahuje nedosažitelné stavy a je minimální. Po převedení obou automatů do kanonického tvaru obdržíme v obou případech následující automat:

$$K = [\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{1\}]$$

$$\begin{aligned}\delta(1, a) &= 2 \\ \delta(1, b) &= 3 \\ \delta(2, a) &= 4 \\ \delta(2, b) &= 1 \\ \delta(3, a) &= 1 \\ \delta(3, b) &= 5 \\ \delta(4, a) &= 6 \\ \delta(4, b) &= 2 \\ \delta(5, a) &= 3 \\ \delta(5, b) &= 6 \\ \delta(6, a) &= 6 \\ \delta(6, b) &= 6\end{aligned}$$

Tedy automaty  $A_1$  a  $A_2$  jsou ekvivalentní.

2. Deterministický konečný automat je určen následující tabulkou:

		a	b
→	0	0	01
	01	02	012
	02	03	013
	03	04	014
←	04	0	01
	012	023	0123
	013	024	0124
←	014	02	012
	023	034	0134
←	024	03	013
←	034	04	014
	0123	0234	01234
←	0124	023	0123
←	0134	024	0124
←	0234	034	0134
←	01234	0234	01234

3. Je třeba dokázat dvě inkluze:

$L(G) \subseteq L$  :

Dokážeme, že pro libovolnou větnou formu  $w$ , kde  $S \Rightarrow^* w$ , platí:  $2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$ . Důkaz provedeme indukcí vzhledem k *délce odvození* větné formy  $w$ .

- **n=0:** - pak  $w = S$  a  $2(\#_A(S) + \#_a(S)) = 0 = \#_B(S) + \#_b(S)$ .
- **indukční krok:** Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou větnou formu, jejíž délka odvození je  $n$ . Ukážeme, že pak toto tvrzení platí též pro každou větnou formu, která má délku odvození  $n + 1$ . Nechť  $w$  je větná forma o délce odvození  $n + 1$  a nechť  $S \Rightarrow v_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow v_n \Rightarrow w$  je její odvození v gramatice  $G$ . Větná forma  $v_n$  má délku odvození  $n$ , proto dle indukčního předpokladu platí:

$$2(\#_A(v_n) + \#_a(v_n)) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n)$$

Derivace  $v_n \Rightarrow w$  vznikla aplikací jednoho z následujících pravidel:

–  $S \rightarrow ABBS$  nebo  $S \rightarrow ABB$ .

Pak:

$$\#_A(w) + \#_a(w) = \#_A(v_n) + \#_a(v_n) + 1 \text{ a}$$

$$\#_B(w) + \#_b(w) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n) + 2 \text{ a tedy}$$

$$2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$$

–  $AB \rightarrow BA$ ,  $BA \rightarrow AB$ ,  $A \rightarrow a$  nebo  $B \rightarrow b$ .

Pak:

$$\#_A(w) + \#_a(w) = \#_A(v_n) + \#_a(v_n) \text{ a}$$

$$\#_B(w) + \#_b(w) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n), \text{ tedy}$$

$$2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$$

Každé slovo  $u$  jazyka  $L(G)$  je větná forma, která neobsahuje neterminály. Proto  $2 \cdot \#_a(u) = \#_b(u)$ .

$L \subseteq L(G)$  :

Nechť  $u \in L$ . Ukážeme, že slovo  $u$  lze odvodit v gramatice  $G$ . Nechť  $n = \#_a(u)$ . Pro odvození slova  $u$  v gramatice  $G$  nejprve aplikujeme  $(n - 1)$  krát pravidlo  $S \rightarrow ABBS$  a pak jedenkrát pravidlo  $S \rightarrow ABB$ . Obdržíme větnou formu  $w = (ABB)^n$ , pro niž platí  $\#_A(w) = \#_a(u) \wedge \#_B(w) = \#_b(u)$ . Nyní pomocí opakované aplikace pravidel  $AB \rightarrow BA$  a  $BA \rightarrow AB$  přepíšeme větnou formu  $w$  na větnou formu  $w'$  tak, aby platilo:

$\forall i \in N, 1 \leq i \leq 3n$  : na  $i$ -tém místě ve slově  $u$  je  $a \iff$   
na  $i$ -tém místě ve větné formě  $w'$  je  $A$

4. a) Necht'  $A$  je konečný automat s  $k$  stavy akceptující jazyk  $L$ .

'  $\implies$  ' Z nekonečnosti jazyka  $L$  plyne existence slova  $w \in L$  délky  $|w| \geq k$ . Když  $|w| < 2k$ , tvrzení je dokázáno. Předpokládejme  $|w| \geq 2k$ . Na slovo  $w$  můžeme aplikovat pumping lemu. Ta zaručuje existenci slov  $v, x, y$  takových, že  $x \neq \varepsilon$ ,  $|x| \leq k$ ,  $w = vxy$  a  $vy \in L$ . Délku slova  $vy$  můžeme ohraničit takto:  $|w| - k \leq |vy| < |w|$ . Nyní buď  $|vy| < 2k$ , anebo pro něj můžeme uvedenou úvahu zopakovat. Protože se vždy slovo zkrátí minimálně o jeden a maximálně o  $k$  symbolů, jeho délka po konečném počtu zkracování bude náležet do intervalu  $< k, 2k)$  délky  $k$ .

'  $\impliedby$  ' Opačná inkluze plyne přímo z pumping lemy: současně se slovem  $w$  délky alespoň  $k$  musí  $L$  obsahovat slova  $vx^i y$  pro všechna  $i \geq 0$ , přičemž  $w = vxy$  a  $x \neq \varepsilon$ .

b) Tvrzení obecně neplatí. Jako protipříklad stačí vzít např. automat  $A$  akceptující jazyk  $\{abc\}^*$ ;  $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_0\})$ , kde  $\delta(q_0, a) = q_1$ ,  $\delta(q_1, b) = q_2$  a  $\delta(q_2, c) = q_0$ .