**IB102 – úkol 3 – řešení** **Odevzdání: 6. 10. 2008**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

---

**1. [2 body]** Uvažujme jazyk $L$ všech správně utvořených matematických výrazů nad abecedou parametrů $a$, $b$, $c$, operandů $+$, $-$, $\cdot$, $:$ a závorek $($, $)$. Rozhodněte, jestli se jedná o regulární jazyk a své tvrzení dokažte.
Příkladem správně utvořeného slova je výraz:

$$(((a+b))\cdot c)-b:(c)$$

Příkladem špatně utvořených slov jsou výrazy:

$$(a-(b+a)$$

$$b+(b\cdot)$$

*Řešení*: Jazyk $L$ není regulární, protože aby bylo možné generovat vnořování závorek, potřebujeme k tomu přinejmenším bezkontextovou gramatiku. Neregularitu jazyka dokážeme pomocí lemmatu o vkládání.

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné.
- Volíme správný výraz $w = ({}^n a + b)^n \in L$ (zřejmě $|w| \geq n$).
- Pro každou trojici slov $x, y, z$ splňující $w = xyz$, $|xy| \leq n$ a $y \neq \varepsilon$ platí $x = ({}^k$, $y = ({}^l$, $z = ({}^{n-k-l} a + b)^n$, kde $0 \leq k, 0 < l \leq n$.
- Zvolíme $i = 0$, pak $xy^i z = xy^0 z = ({}^k({}^{n-k-l} a + b)^n = ({}^{n-l} a + b)^n$. Víme, že $l > 0$, tedy počet uvozovacích závorek je menší jak počet uzavíracích závorek. Výraz $xy^0 z$ není správně utvořen a proto nepatří do jazyka $L$. Z lemma o vkládání pak plyne, že jazyk $L$ není regulární.

**IB102 – úkol 3 – řešení** **Odevzdání: 6. 10. 2008**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

**2.** [**2 body**] Rozhodněte, zda je jazyk $L = \{a^{(n!)} \mid n > 1\}$ regulární. Své rozhodnutí dokažte.

*Řešení*: Jazyk $L$ není regulární. Důkaz pomocí lemmatu o vkládání.

- Nechť $m \in \mathbb{N}$ je libovolné.
- Volíme $w = a^{(n!)} \in L$, kde $n = m + 1$ (zřejmě $|w| \geq m$).
- Pro každou trojici slov $x, y, z$ splňující $w = xyz$, $|xy| \leq m$ a $y \neq \varepsilon$ platí $x = a^k$, $y = a^l$, $z = a^{(n!)-k-l}$, kde $0 \leq k, 0 < l \leq m$.
- Volbou $i = 2$ dostáváme $xy^iz = xy^2z = a^{(n!)+l}$. Ukážeme, že toto slovo nepatří do $L$, čili neexistuje číslo $s \in \mathbb{N}$ takové, že $s! = n! + l$. Použitím podmínek $0 < l \leq m$, $n > m$ a $n > 1$ (ze zadání) lehce ukážeme, že $n! + l < n! + n \leq n! + n! < n!n + n!$. Jednoduchou úpravou pak dostáváme nerovnost $n! + l < (n + 1)!$, pro $s$ tedy musí platit $n < s < n + 1$. Zřejmě žádné takové $s \in \mathbb{N}$ neexistuje, slovo $xy^2z$ tedy nemůže patřit do $L$.

Z lemma o vkládání plyne, že $L$ není regulární.