**IB102 – úkol 8 – řešení** **Odevzdání: 10. 11. 2008**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

**1.** Mějme bezkontextovou gramatiku $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{aligned}
P = \{\ S &\to AB \mid A \mid B \mid \varepsilon,\\
A &\to aCbA \mid abA \mid aCb \mid ab,\\
B &\to aBbb \mid aBbbb \mid abb \mid abbb,\\
C &\to abC \mid ab\}
\end{aligned}
$$

**(a) [1 bod]** Určete $L(G)$. Stručně zdůvodněte, proč $G$ generuje právě tenhle jazyk.

*Řešení*: Na základě pravidla $S \to AB$ můžem na jazyk $L$ nahlížet jako na zřetězení 2 jazyků $L_1$ a $L_2$, kde $L_1$ vygeneruji z neterminálu $A$ a $L_2$ z neterminálu $B$. Pravidla $S \to A \mid B \mid \varepsilon$ vlastně rozpisují první pravidlo pro případy, když některý (případně oba) z neterminálů $A, B$ přepíšu na $\varepsilon$. Jazyk $L_1$ si tehdy můžu představit jako množinu slov, které můžu odvodit z $A$, která navíc obsahuje $\varepsilon$. Analogické tvrzení platí pro $L_2$ a neterminál $B$. Jenom poznamenejme, že při odvození slov z jazyka $L_1$ využíváme množinu neterminálů $\{A, C\}$, pro $L_2$ jenom $\{B\}$. Tyto množiny jsou disjunktní, tedy skutečně platí $L(G) = L_1 L_2$.

Podívejme se nejdřív na jazyk $L_1$. Vidíme, že z neterminálu $A$ jistě dostaneme slovo začínající na $a$ a končící na $b$. Neterminál $C$ mezi tyto terminály může vsunout nějaký počet dvojic $ab$. Máme zde dokonce pravidla, které umožňují slova takového tvaru řetězit za sebe ($A$ se vyskytuje jak na levé, tak na pravé straně pravidel, a to jako poslední symbol). Celkem tedy dostáváme $L_1 = (a(ab)^*b)^*$.

Úvaha pro $L_2$ je jednoduchá. Vidíme, že na pravé straně všech pravidel pro $B$ se vyskytuje dvakrát nebo třikrát víc terminálů $b$ než terminálů $a$. Proto $L_2 = \{a^i b^j \mid 2i \le j \le 3i\}$.

Závěr: $L(G) = \{(a(ab)^*b)^* a^i b^j \mid 2i \le j \le 3i\}$.

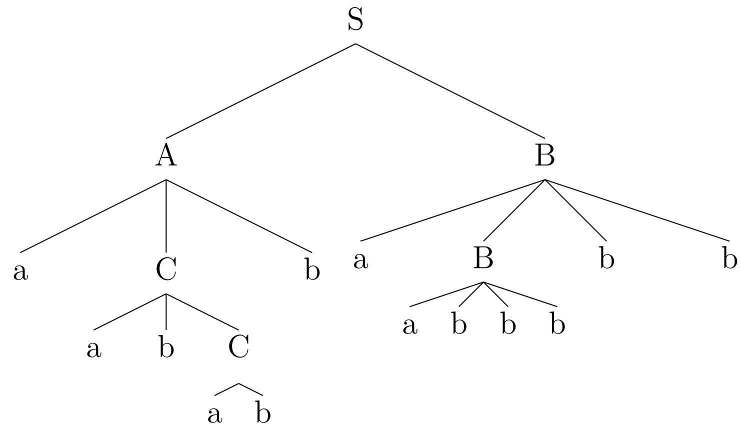
**IB102 – úkol 8 – řešení** **Odevzdání: 10. 11. 2008**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

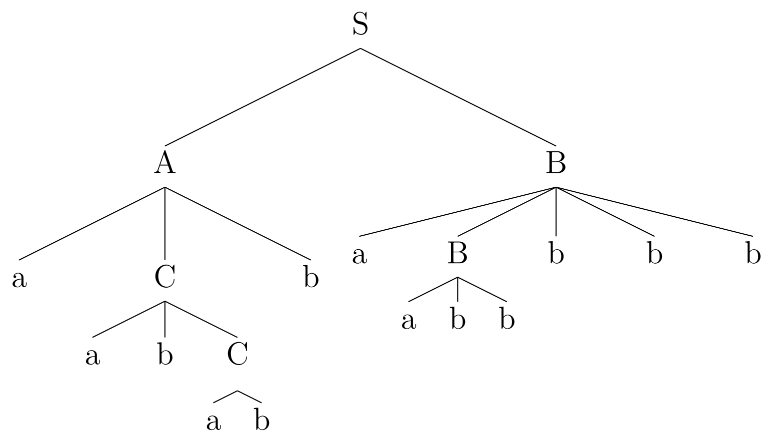
**(b) [1 bod]** Najděte všechny derivační stromy pro slovo *aababbaabbbbb*.

*Řešení*: Pro dané slovo existují 2 různé derivační stromy:

I




II



**IB102 – úkol 8 – řešení** **Odevzdání: 10. 11. 2008**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

**2.** [**2 body**] Navrhněte jednoznačnou bezkontextovou gramatiku G generující jazyk

$$L(G) = \{a^{2n}b^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{a^{3n}b^{3n} \mid n \geq 0\}.$$

Stručně zdůvodněte, proč je gramatika jednoznačná.

*Řešení*: Umíme navrhnout jednoznačnou gramatiku pro jazyk $L_1 = \{a^{2n}b^{2n}\}$ i $L_2 = \{a^{3n}b^{3n}\}$ a tím pádem i gramatiku, která generuje jejich sjednocení (Pro dvě gramatiky s disjunktními množinami neterminálů stačí sjednotit neterminály a pravidla, přidat nový počátečná neterminál a dvě pravidla, která nový neterminál přepíší na původní iniciální neterminál první resp. druhé gramatiky). Taková gramatika ovšem není jednoznačná – pro slova ve tvaru $a^{6n}b^{6n}$, která patří do obou sjednocovaných jazyků budou vždy existovat dva derivační stromy.

Hledaný jazyk si vyjádříme jako sjednocení (v tomto případě tří) jazyků, jejichž průniky budou prázdné. Pokud si jazyk zapíšeme jako $(L_1 \setminus \{a^{6n}b^{6n}\}) \cup L_2$, výsledek se zřejmě nezmění – množina $\{a^{6n}b^{6n}\}$ je podmnožinou $L_2$. Množinu $L_1 \setminus \{a^{6n}b^{6n}\}$, tj. $n$ je sudé, ale není dělitelné šesti, můžeme zapsat jako $\{a^{6n+2}b^{6n+2}\} \cup \{a^{6n+4}b^{6n+4}\}$ a výsledný jazyk pak jako

$$\{a^{6n+2}b^{6n+2}\} \cup \{a^{6n+4}b^{6n+4}\} \cup \{a^{3n}b^{3n}\}.$$

Výsledná gramatika může být například $G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to X \mid Y \mid Z, \\ X &\to aaaaaaXbbbbbb \mid aabb, \\ Y &\to aaaaaaYbbbbbb \mid aaaabbbb, \\ Z &\to aaaZbbb \mid \varepsilon\} \end{aligned}$$

Protože z neterminálů $X, Y, Z$ lze odvodit terminální řetěz pouze jedním způsobem a protože jsou množiny slov vygenerovatelných z neterminálů $X, Y, Z$ disjunktní, je gramatika jednoznačná.