

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

1. [2 body] Následující bezkontextovou gramatiku převed'te do Chomského normální formy pomocí postupu uvedeného na přednášce:

$$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow C \mid aB \mid AB, \\ A \rightarrow aa \mid BC \mid ABC \mid aAbCc, \\ B \rightarrow Ca \mid C \mid b, \\ C \rightarrow \varepsilon \mid C \mid aBc \}$$

**Řešení:** Gramatika je bez nepoužitelných neterminálů. Před převodem do CNF musíme nejprve odstranit  $\varepsilon$ -pravidla a jednoduchá pravidla.

Odstranění  $\varepsilon$ -pravidel:

$$N_\varepsilon = \{S, A, B, C\}$$

Ekvivalentní gramatika bez  $\varepsilon$ -pravidel:  $G' = (\{S', S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P', S')$ , kde

$$P' = \{ S' \rightarrow \varepsilon \mid S, \\ S \rightarrow a \mid A \mid B \mid C \mid aB \mid AB, \\ A \rightarrow A \mid B \mid C \mid aa \mid AB \mid AC \mid BC \mid abc \mid ABC \mid abCc \mid aAbc \mid aAbCc, \\ B \rightarrow a \mid b \mid C \mid Ca, \\ C \rightarrow C \mid ac \mid aBc \}$$

Odstranění jednoduchých pravidel:

$$N_{S'} = \{S', S, A, B, C\}, N_S = \{S, A, B, C\}, N_A = \{A, B, C\}, N_B = \{B, C\}, N_C = \{C\}$$

Ekvivalentní gramatika bez jednoduchých pravidel:  $G'' = (\{S', S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P'', S')$ , kde

$$P'' = \{ S' \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid aa \mid ac \mid aB \mid Ca \mid AB \mid AC \mid BC \mid aBc \mid abc \mid ABC \mid abCc \mid aAbc \mid aAbCc, \\ S \rightarrow a \mid b \mid aa \mid ac \mid aB \mid Ca \mid AB \mid AC \mid BC \mid aBc \mid abc \mid ABC \mid abCc \mid aAbc \mid aAbCc, \\ A \rightarrow a \mid b \mid aa \mid ac \mid Ca \mid AB \mid AC \mid BC \mid aBc \mid abc \mid ABC \mid abCc \mid aAbc \mid aAbCc, \\ B \rightarrow a \mid b \mid ac \mid Ca \mid aBc, \\ C \rightarrow ac \mid aBc \}$$

Převod do CNF: Ekvivalentní gramatika v CNF:

$$G''' = (\{S', S, A, B, C, a', b', c', \langle BC \rangle, \langle Bc \rangle, \langle bc \rangle, \langle bCc \rangle, \langle Cc \rangle, \langle Abc \rangle, \langle AbCc \rangle\}, \{a, b, c\}, P''', S'),$$

kde

$$\begin{aligned}
P'' = \{ & S' \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid a'a' \mid a'c' \mid a'B \mid Ca' \mid AB \mid AC \mid BC \mid a'\langle Bc \rangle \mid a'\langle bc \rangle \mid A\langle BC \rangle \\
& \mid a'\langle bCc \rangle \mid a'\langle Abc \rangle \mid a'\langle AbCc \rangle, \\
& S \rightarrow a \mid b \mid a'a' \mid a'c' \mid a'B \mid Ca' \mid AB \mid AC \mid BC \mid a'\langle Bc \rangle \mid a'\langle bc \rangle \mid A\langle BC \rangle \\
& \mid a'\langle bCc \rangle \mid a'\langle Abc \rangle \mid a'\langle AbCc \rangle, \\
& A \rightarrow a \mid b \mid a'a' \mid a'c' \mid Ca' \mid AB \mid AC \mid BC \mid a'\langle Bc \rangle \mid a'\langle bc \rangle \mid A\langle BC \rangle \\
& \mid a'\langle bCc \rangle \mid a'\langle Abc \rangle \mid a'\langle AbCc \rangle, \\
& B \rightarrow a \mid b \mid a'c' \mid Ca' \mid a'\langle Bc \rangle, \\
& C \rightarrow a'c' \mid a'\langle Bc \rangle, \\
& a' \rightarrow a, \\
& b' \rightarrow b, \\
& c' \rightarrow c, \\
& \langle bc \rangle \rightarrow b'c', \\
& \langle BC \rangle \rightarrow BC, \\
& \langle Bc \rangle \rightarrow Bc', \\
& \langle bCc \rangle \rightarrow b'\langle Cc \rangle, \\
& \langle Cc \rangle \rightarrow Cc', \\
& \langle Abc \rangle \rightarrow A\langle bc \rangle, \\
& \langle AbCc \rangle \rightarrow A\langle bCc \rangle \}
\end{aligned}$$

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

2. [2 body] Dokažte, že jazyk  $L = \{a^{(n^2)} \mid n > 0\}$  není bezkontextový. Použijte pumping lemma pro bezkontextové jazyky.

**Řešení:**

1. nechť  $n$  je libovolné nezáporné celé číslo
2. zvolme slovo  $z = a^{n^2} \in L$
3. uvažme všechny možnosti, jak lze slovo  $z$  zapsat jako  $z = uvwxy$  tak, aby  $vx \neq \varepsilon$ ,  $|vwx| \leq n$ :  
Označme si  $|vx| = g$ .
4. Vezměme slovo  $uv^2wx^2y$ . Toto slovo má délku  $n^2 + g$ . Ale nejbližší vyšší druhá mocnina nějakého přirozeného čísla –  $(n+1)^2$  – je od  $n^2$  vzdálena alespoň  $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ . Protože  $|vwx| \leq n$ , tak  $g \leq n$ . Tedy i  $g < 2n + 1$ , proto  $n^2 + g$  není druhá mocnina žádného přirozeného čísla. Slovo  $uv^2wx^2y$  nepatří do jazyka  $L$ .

□