

# Příklad

$\mathcal{M} = (\{q_0, p, f\}, \{a, b\}, \{A, B, Z\}, \delta, q_0, Z, \{f\})$ , kde

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AZ)\}$$

$$\delta(q_0, b, Z) = \{(q_0, BZ)\}$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{(q_0, BA)\}$$

$$\delta(q_0, a, B) = \{(q_0, AB)\}$$

$$\delta(q_0, b, B) = \{(q_0, BB)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z) = \{(p, Z)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, A) = \{(p, A)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, B) = \{(p, B)\}$$

$$\delta(p, a, A) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, b, B) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, \varepsilon, Z) = \{(f, Z)\}$$

# Příklad

$\mathcal{M} = (\{q_0\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \emptyset)$ , kde

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, A)\}$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{(q_0, \varepsilon)\}$$

# Ekvivalence dvou způsobů akceptování

**Věta 3.39.** Pro každý jazyk  $L$  platí:

$L = L(\mathcal{N})$  pro nějaký PDA  $\mathcal{N} \iff L = L_e(\mathcal{M})$  pro nějaký PDA  $\mathcal{M}$ .

**Důkaz.** **koncový stav  $\implies$  prázdný zásobník**

**Intuice:**

K danému  $\mathcal{N}$  zkonstruujeme  $\mathcal{M}$  simulující jeho činnost.

Vejde-li  $\mathcal{N}$  do koncového stavu,  $\mathcal{M}$  se nedeterministicky rozhodne

- pokračovat v simulaci automatu  $\mathcal{N}$  **nebo**
- přejít do nově přidaného stavu  $q_\epsilon$ , v němž vyprázdní zásobník.

## Komplikace:

**Řešení:** před zahájením simulace bude u  $\mathcal{M}$  na dně zásobníku nový symbol, který nedovolíme odstranit jinde, než ve stavu  $q_\epsilon$ .

**Konstrukce:** Nechť  $\mathcal{N} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ .

Klademe  $\mathcal{M} = (Q \cup \{q'_0, q_\varepsilon\}, \Sigma, \Gamma \cup \{Z'\}, \delta', q'_0, Z', \emptyset)$ ,  
kde  $Z' \notin \Gamma$ ,  $q'_0, q_\varepsilon \notin Q$  a  $\delta'$  je definována takto:

- $\delta'(q'_0, \varepsilon, Z') = \{(q_0, Z_0 Z')\}$
- jestliže  $\delta(q, a, Z)$  obsahuje  $(r, \gamma)$ , pak  $\delta'(q, a, Z)$  obsahuje  $(r, \gamma)$
- $\delta'(q, \varepsilon, Z)$  obsahuje  $(q_\varepsilon, Z)$   
pro všechny  $q \in F$  a  $Z \in \Gamma \cup \{Z'\}$
- $\delta'(q_\varepsilon, \varepsilon, Z) = \{(q_\varepsilon, \varepsilon)\}$   
pro všechny  $Z \in \Gamma \cup \{Z'\}$

**Korektnost:**

**prázdný zásobník  $\implies$  koncový stav**

**Intuice:**

K danému  $\mathcal{M}$  zkonstruujeme  $\mathcal{N}$  simulující jeho činnost.

- $\mathcal{N}$  si před simulací přidá na dno zásobníku nový symbol.
- Je-li  $\mathcal{N}$  schopen číst tento symbol (tj. zásobník automatu  $\mathcal{M}$  je prázdný) tak  $\mathcal{N}$  přejde do nově přidaného stavu  $q_f$ , který je koncovým stavem.

**Konstrukce:** Nechť  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ .

Klademe  $\mathcal{N} = (Q \cup \{q'_0, q_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{Z'\}, \delta', q'_0, Z', \{q_f\})$ ,  
kde  $Z' \notin \Gamma$ ,  $q'_0, q_f \notin Q$  a  $\delta'$  je definována takto:

- $\delta'(q'_0, \varepsilon, Z') = \{(q_0, Z_0 Z')\}$
- jestliže  $\delta(q, a, Z)$  obsahuje  $(r, \gamma)$ , pak  $\delta'(q, a, Z)$  obsahuje  $(r, \gamma)$
- $\delta'(q, \varepsilon, Z') = \{(q_f, \varepsilon)\}$   
pro všechny  $q \in Q$

□



# Grafická reprezentace konfigurací

# Rozšířený zásobníkový automat

**Definice 3.44.** Rozšířený zásobníkový automat je sedmice  $\mathcal{R} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , kde

- všechny symboly až na  $\delta$  mají tentýž význam jako v definici PDA,
- $\delta$  je zobrazením  
z **konečné podmnožiny** množiny  $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^*$   
do **konečných podmnožin** množiny  $Q \times \Gamma^*$ .

Pojmy konfigurace a akceptovaný jazyk (koncovým stavem, prázdným zásobníkem) zůstávají beze změny. **Krok výpočtu**  $\frac{}{\mathcal{R}}$  definujeme takto:

$$(p, aw, \gamma_1\alpha) \frac{}{\mathcal{R}} (q, w, \gamma_2\alpha) \stackrel{def}{\iff} \exists (q, \gamma_2) \in \delta(p, a, \gamma_1) \text{ pro } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$$

# Příklad

$\mathcal{R} = (\{q_0, p, f\}, \{a, b, c, d\}, \{A, B, Z\}, \delta, q_0, Z, \{f\})$ , kde

$$\delta(q_0, a, \varepsilon) = \{(q_0, A)\}$$

$$\delta(q_0, b, \varepsilon) = \{(q_0, B)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, a, A) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, b, B) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, c, AA) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, c, BBB) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, d, Z) = \{(f, \varepsilon)\}$$

# Ekvivalence rozšířených PDA a PDA

**Lemma 3.45.** Ke každému rozšířenému PDA existuje ekvivalentní (*obyčejný*) PDA.

**Intuice:**

**Důkaz.** Nechť  $\mathcal{R} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  je rozšířený PDA a  $m = \max\{|\alpha| \mid \delta(q, a, \alpha) \text{ je definováno pro nějaké } q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\}$ .

Definujeme  $\mathcal{P} = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_1, Z_1, F_1)$ , kde

- $Q_1 = \{[q, \alpha] \mid q \in Q, \alpha \in \Gamma_1^*, 0 \leq |\alpha| \leq m\}$ ,
- $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{Z_1\}$ , kde  $Z_1$  je nový symbol,
- $q_1 = [q_0, Z_0 Z_1^{m-1}]$ ,
- $F_1 = \{[q, \alpha] \mid q \in F, \alpha \in \Gamma_1^*, 0 \leq |\alpha| \leq m\}$ .

- $\delta_1$  je definována takto:
  - jestliže  $\delta(q, a, X_1 \dots X_k)$  obsahuje  $(r, Y_1 \dots Y_l)$ , pak
    - $l \geq k$ 
      - $\delta_1([q, X_1 \dots X_k \alpha], a, Z)$  obsahuje  $([r, \beta], \gamma Z)$ ,
      - kde  $\beta\gamma = Y_1 \dots Y_l \alpha$  a  $|\beta| = m$ ,
      - pro všechny  $Z \in \Gamma_1$  a  $\alpha \in \Gamma_1^*$  takové, že  $|\alpha| = m - k$
    - $l < k$ 
      - $\delta_1([q, X_1 \dots X_k \alpha], a, Z)$  obsahuje  $([r, Y_1 \dots Y_l \alpha Z], \varepsilon)$
      - pro všechny  $Z \in \Gamma_1$  a  $\alpha \in \Gamma_1^*$  takové, že  $|\alpha| = m - k$
  - $\delta_1([q, \alpha], \varepsilon, Z) = \{([q, \alpha Z], \varepsilon)\}$
  - pro všechny  $q \in Q$ ,  $Z \in \Gamma_1$  a  $\alpha \in \Gamma_1^*$  takové, že  $|\alpha| < m$

**Korektnost:** Ověříme, že platí

$$(q, aw, X_1 \dots X_k X_{k+1} \dots X_n) \mid_{\mathcal{R}} (r, w, Y_1 \dots Y_l X_{k+1} \dots X_n) \\ \iff ([q, \alpha], aw, \beta) \mid_{\mathcal{P}}^+ ([r, \alpha'], w, \beta'),$$

kde:

1.  $\alpha\beta = X_1 \dots X_n Z_1^m$ ,
2.  $\alpha'\beta' = Y_1 \dots Y_l X_{k+1} \dots X_n Z_1^m$ ,
3.  $|\alpha| = |\alpha'| = m$  a
4. mezi dvěma výše uvedenými konfiguracemi PDA  $\mathcal{P}$  neexistuje taková konfigurace, kde druhá komponenta stavu (tj. cache) by měla délku  $m$ .

□