

Konečné automaty

Definice 1. Konečný automat (Finite Automaton, FA) \mathcal{M} je pětice $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je neprázdná konečná množina **stavů**.
- Σ je konečná **vstupní abeceda**.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ je parciální **přechodová funkce**.
- $q_0 \in Q$ je **počáteční (iniciální) stav**.
- $F \subseteq Q$ je množina **koncových (akceptujících) stavů**.

Příklad a zápis tabulkou

Zápis grafem

Výpočet konečného automatu

Rozšířená přechodová funkce $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ je parciální funkce definovaná induktivně vzhledem k délce slova ze Σ^* :

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$ pro každý stav $q \in Q$.
- $\hat{\delta}(q, wa) = \begin{cases} \delta(\hat{\delta}(q, w), a) & \text{je-li } \hat{\delta}(q, w) \text{ i } \delta(\hat{\delta}(q, w), a) \text{ definováno,} \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$

Slovo w je **akceptováno** automatem \mathcal{M} právě když $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$.

Slovo w je **zamítáno** automatem \mathcal{M} právě když $\hat{\delta}(q_0, w) \notin F$.

Jazyk **přijímaný** (**akceptovaný, rozpoznávaný**) automatem \mathcal{M} je

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}.$$

Jazyk, který je rozpoznatelný (nějakým) konečným automatem, nazveme **regulární**.

Ekvivalenci konečných automatů definujeme podobně jako v případě gramatik: konečné automaty \mathcal{M} a \mathcal{M}' jsou ekvivalentní, pokud $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$.

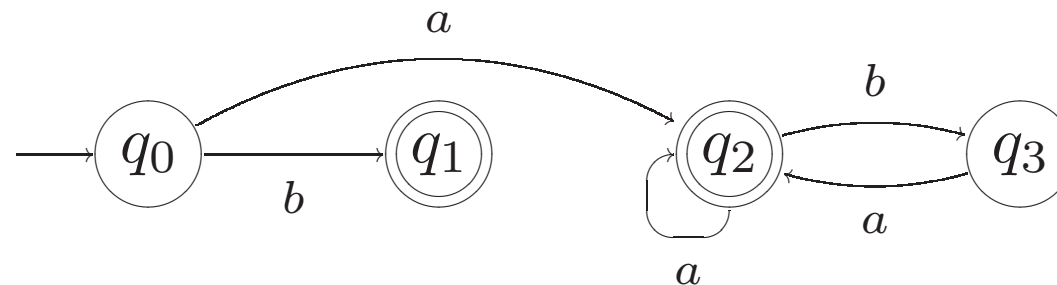
Parcialita přechodové funkce

Přechodová funkce δ zavedena jako parciální.

Parcialita přechodové funkce nemá podstatný vliv na výpočetní sílu konečných automatů.

Lemma 1. Ke každému FA \mathcal{M} existuje ekvivalentní FA \mathcal{M}' s totální přechodovou funkcí.

Idea důkazu



Důkaz. Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Nechť automat \mathcal{M}' je definován předpisem
 $\mathcal{M}' = (Q \cup \{p\}, \Sigma, \delta', q_0, F)$, kde $p \notin Q$ a

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \text{je-li } \delta(q, a) \text{ definováno,} \\ p & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zejména $\delta'(p, a) = p$ pro každé $a \in \Sigma$.

Důkaz korektnosti:

- \mathcal{M}' má totální přechodovou funkci – zřejmé z definice \mathcal{M}' .
- \mathcal{M} a \mathcal{M}' jsou ekvivalentní – dokážeme.

Indukcí k délce slova ověříme, že pro každé $q \in Q$ a $w \in \Sigma^*$ platí

$$\hat{\delta}'(q, w) = \begin{cases} \hat{\delta}(q, w) & \text{je-li } \hat{\delta}(q, w) \text{ definováno,} \\ p & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jelikož $p \notin F$, platí $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$.

□

Konstrukce konečných automatů

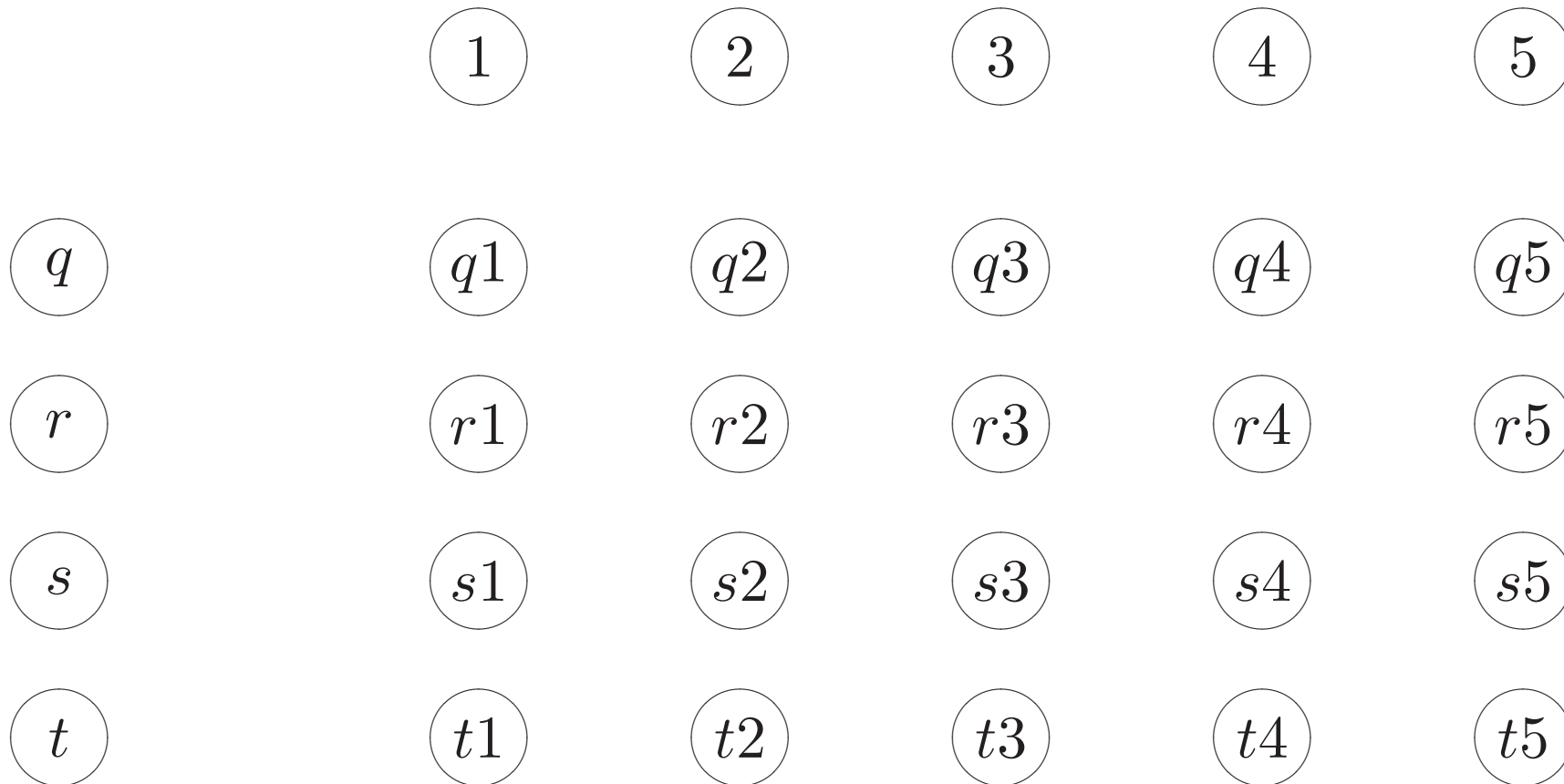
Máme za úkol sestrojít automat rozpoznávající jazyk

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abaa\}$$

Označení stavů automatu zvolíme tak, aby bylo patrné, jaká část požadovaného podslova *abaa* již byla automatem přečtena:

Příklad

$\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abaa \wedge (w = b \vee w \text{ začíná i končí na } a \text{ a mezi dvěma výskyty } b \text{ je alespoň jedno } a)\}$



Synchronní paralelní kompozice automatů

Pro dané automaty \mathcal{M}_1 a \mathcal{M}_2 umožňuje sestavit automat rozpoznávající **průnik (sjednocení, rozdíl)** jazyků $L(\mathcal{M}_1)$ a $L(\mathcal{M}_2)$.

Nechť $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$
a **přechodové funkce δ_1, δ_2 jsou totální.**

Definujeme FA $\mathcal{M}_3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q_3, F_3)$, kde

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2 = \{(p, q) \mid p \in Q_1, q \in Q_2\}$
- $F_3 = F_1 \times F_2 = \{(p, q) \mid p \in F_1, q \in F_2\}$
- $q_3 = (q_1, q_2)$
- $\delta_3((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$

Tvrzení: $L(\mathcal{M}_3) = L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2)$

Důkaz. Nejprve dokážeme toto tvrzení:

$$\widehat{\delta}_3((q_1, q_2), w) = (p, q) \iff \widehat{\delta}_1(q_1, w) = p \wedge \widehat{\delta}_2(q_2, w) = q$$

Důkaz se provede indukcí vzhledem k $|w|$.

- **Základní krok** $|w| = 0$:

Z definice $\widehat{\delta}_3((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$, $\widehat{\delta}_1(q_1, \varepsilon) = q_1$, $\widehat{\delta}_2(q_2, \varepsilon) = q_2$.

Pro $w = \varepsilon$ je tedy ekvivalence platná.

- **Indukční krok:** Nechť $w = va$, kde $v \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$. Platí:

$$\widehat{\delta}_3((q_1, q_2), va) = (p, q) \iff$$

$$\widehat{\delta}_3((q_1, q_2), v) = (r, s) \wedge \delta_3((r, s), a) = (p, q) \iff$$

$$\widehat{\delta}_1(q_1, v) = r \wedge \widehat{\delta}_2(q_2, v) = s \wedge \delta_1(r, a) = p \wedge \delta_2(s, a) = q \iff$$

$$\widehat{\delta}_1(q_1, va) = p \wedge \widehat{\delta}_2(q_2, va) = q$$

Nyní již lze snadno dokázat vlastní tvrzení věty:

$$w \in L(\mathcal{M}_3) \iff$$

$$\hat{\delta}_3((q_1, q_2), w) = (p, q) \text{ kde } p \in F_1 \text{ a } q \in F_2 \iff$$

$$\hat{\delta}_1(q_1, w) = p \wedge \hat{\delta}_2(q_2, w) = q \iff$$

$$w \in L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2).$$

□

Modifikace pro **sjednocení**, tj. $L(\mathcal{M}_3) = L(\mathcal{M}_1) \cup L(\mathcal{M}_2)$:

DŮ: Modifikujte konstrukci tak, aby platilo $L(\mathcal{M}_3) = L(\mathcal{M}_1) \setminus L(\mathcal{M}_2)$.

Automat pro komplement

K automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s **totální přechodovou funkcí** sestrojíme automat $\overline{\mathcal{M}}$ rozpoznávající jazyk $\text{co-}L(\mathcal{M})$ jako

$$\overline{\mathcal{M}} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F).$$

