

# Rozšíření konečných automatů II

## Automaty s $\varepsilon$ -kroky

## Definice 2.46. Nedeterministický FA s $\varepsilon$ -kroky je

$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , kde význam všech složek je stejný jako v definici NFA s výjimkou přechodové funkce  $\delta$ . Ta je definována jako totální zobrazení  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$ .

---

### Rozšířená přechodová funkce

Definujeme funkci  $D_\varepsilon : Q \rightarrow 2^Q$  následujícím předpisem.

$D_\varepsilon(p)$  je nejmenší množina  $X \subseteq Q$  taková, že platí:

- $p \in X$ ,
- pokud  $q \in X$  a  $r \in \delta(q, \varepsilon)$ , pak také  $r \in X$ .

Rozšíření funkce  $D_\varepsilon$  na množiny stavů: pro  $Y \subseteq Q$  položíme

$$D_\varepsilon(Y) = \bigcup_{q \in Y} D_\varepsilon(q).$$

# Příklad - výpočet $D_\varepsilon$

Definice rozšířené přechodové funkce  $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = D_\varepsilon(q)$ ,
- $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, w)} D_\varepsilon(\delta(p, a))$ .

**Lemma 2.47.** V přechodovém grafu automatu  $\mathcal{M}$  existuje cesta  $p_1 \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon} p_m \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon} q_n$ , kde  $m, n \geq 1$ ,  $a \in \Sigma$ , právě když  $q_n \in \hat{\delta}(p_1, a)$ .

---

**Jazyk** přijímaný automatem  $\mathcal{M}$  s  $\varepsilon$ -kroky je

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

# Příklad - výpočet rozšířené přechodové funkce pro automat s $\varepsilon$ -kroky

# Ekvivalence automatů s $\varepsilon$ -kroky a NFA

**Věta 2.48.** Ke každému NFA  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  s  $\varepsilon$ -kroky existuje ekvivalentní NFA (bez  $\varepsilon$ -kroků).

**Důkaz. Konstrukce**  $\overline{\mathcal{M}} = (Q, \Sigma, \gamma, q_0, G)$  bez  $\varepsilon$ -kroků:

$$\gamma(q, a) = \hat{\delta}(q, a) \text{ pro každé } q \in Q, a \in \Sigma$$

$$G = \begin{cases} F & \text{pokud } D_\varepsilon(q_0) \cap F = \emptyset, \\ F \cup \{q_0\} & \text{jinak.} \end{cases}$$

**Korektnost:** Dokážeme, že pro libovolné  $p \in Q$ ,  $w \in \Sigma^+$  platí  $\hat{\delta}(p, w) = \hat{\gamma}(p, w)$  (indukcí vzhledem k délce slova  $w$ ).

**Algoritmus**

□

# Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

**Věta 2.49. a 2.51.** Třída regulárních jazyků je uzavřená na **sjednocení, průnik, rozdíl a komplement**.

**Důkaz.** synchronní paralelní kompozice automatů + komplement.  $\square$

**Příklad.**

$$L_1 = \{a^i b^i c^j \mid 2i \geq j \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a\}^* \cdot \{b\}^*$$

$$L_3 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$L_1 \cap L_2 = L_3$$

Jazyk  $L_2$  je regulární,  $L_3$  není regulární  $\implies L_1$  **není regulární**.

**Věta 2.52.** Třída regulárních jazyků je uzavřená na **zřetězení**.

**Důkaz.**

Nechť  $L_1$  a  $L_2$  jsou regulární jazyky, rozpoznávané NFA  $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$  a  $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$ , kde  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ .

Definujeme NFA s  $\varepsilon$ -kroky  $\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2 = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_1, F_2)$ , kde

$$\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{((p, \varepsilon), \{q_2\}) \mid p \in F_1\}.$$



**Korektnost:** Chceme dokázat  $L(\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2) = L(\mathcal{M}_1).L(\mathcal{M}_2)$

$\supseteq$ : Nechť  $u \in L(\mathcal{M}_1)$ , tedy  $\exists r \in F_1$  splňující  $r \in \hat{\delta}_1(q_1, u)$ .  
Nechť  $v \in L(\mathcal{M}_2)$ , tedy  $\hat{\delta}_2(q_2, v) \cap F_2 \neq \emptyset$ . Pak

$$\hat{\delta}(q_1, uv) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_1, u)} \hat{\delta}(p, v) \supseteq \hat{\delta}(r, v) \supseteq \hat{\delta}(q_2, v) = \hat{\delta}_2(q_2, v).$$

Protože  $\hat{\delta}_2(q_2, v) \cap F_2 \neq \emptyset$ , tak  $\hat{\delta}(q_1, uv) \cap F_2 \neq \emptyset$ .  
Tedy  $uv \in L(\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2)$ .

$\subseteq$ :

□

**Věta 2.53.** Třída regulárních jazyků je uzavřená na **iteraci**.

**Důkaz.**

Nechť  $L$  je regulární jazyk akceptovaný NFA  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ .

Definujeme NFA s  $\varepsilon$ -kroky  $\mathcal{M}_* = (Q \cup \{p\}, \Sigma, \delta', p, \{p\})$ , kde  $p \notin Q$  a

$$\delta' = \delta \cup \{((p, \varepsilon), \{q_0\})\} \cup \{((q, \varepsilon), \{p\}) \mid q \in F\}. \quad \square$$

# Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků - Shrnutí

# Regulární výrazy

**Definice 2.58.** Množina **regulárních výrazů** nad abecedou  $\Sigma$ , označovaná  $RE(\Sigma)$ , je definována induktivně takto:

1.  $\varepsilon$ ,  $\emptyset$  a  $a$  pro každé  $a \in \Sigma$  jsou regulární výrazy nad  $\Sigma$  (tzv. *základní regulární výrazy*).
2. Jsou-li  $E, F$  regulární výrazy nad  $\Sigma$ , jsou také  $(E.F)$ ,  $(E + F)$  a  $(E^*)$  regulární výrazy nad  $\Sigma$ .
3. Každý regulární výraz vznikne po konečném počtu aplikací kroků 1–2.

Každý regulární výraz  $E$  nad abecedou  $\Sigma$  **popisuje** (jednoznačně určuje) **jazyk**  $L(E)$  nad abecedou  $\Sigma$  podle těchto pravidel:

$$L(\epsilon) \stackrel{def}{=} \{\epsilon\}$$

$$L(\emptyset) \stackrel{def}{=} \emptyset$$

$$L(a) \stackrel{def}{=} \{a\} \text{ pro každé } a \in \Sigma$$

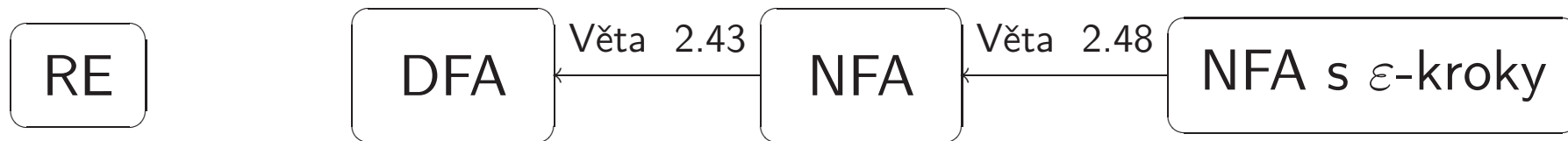
$$L(E.F) \stackrel{def}{=} L(E).L(F)$$

$$L(E + F) \stackrel{def}{=} L(E) \cup L(F)$$

$$L(E^*) \stackrel{def}{=} L(E)^*$$

# Příklady

# Ekvivalence konečných automatů a reg. výrazů

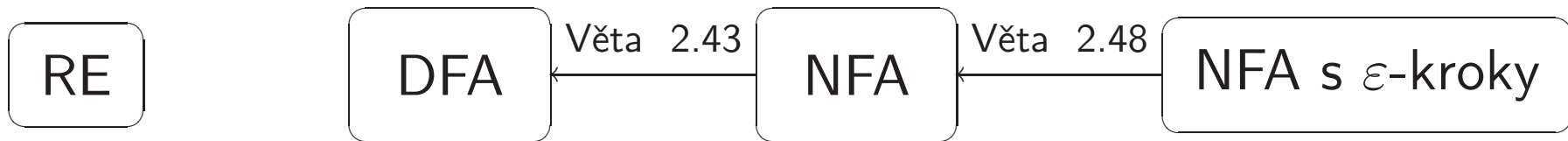


**Věta 2.60.** Nechť  $E$  je regulární výraz. Pak existuje konečný automat rozpoznávající  $L(E)$ .

**Důkaz.** Pro libovolnou abecedu  $\Sigma$  lze zkonstruovat konečné automaty, které rozpoznávají jazyky popsané základními regulárními výrazy, tj.  $\emptyset$ ,  $\{\varepsilon\}$  a  $\{a\}$  pro každé  $a \in \Sigma$ . Tvrzení věty pak plyne z uzavřenosti jazyků rozpoznatelných konečnými automaty vůči operacím sjednocení, zřetězení a iteraci. □

# Příklad





**Věta 2.62.** Nechť  $L$  je akceptovaný nějakým DFA, pak  $L$  je popsateľný nějakým regulárním výrazem.

**Důkaz** bude podán později pomocí regulárních přechodových grafů.

**Kleeneho věta 2.63.** Libovolný jazyk je popsateľný regulárním výrazem právě když je rozpoznateľný konečným automatem.

**Ekvivalentní formulace:** Třída jazyků rozpoznateľných konečnými automaty je nejmenší třída, která obsahuje všechny konečné množiny a je uzavřena na sjednocení, zřetězení a iteraci.