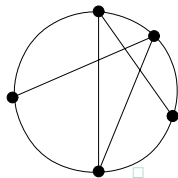
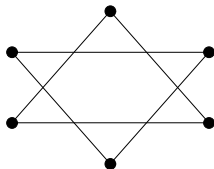
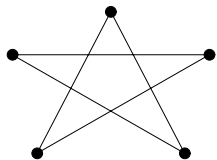


2 Souvislost grafů

Pokud máme graf, který modeluje nějaká spojení či síť, přirozeně nás zajímá, jakou máme možnost se dostat odněkud někam v tomto grafu. To má množství praktických motivací – například počítačové, dopravní, telefonní či potrubní sítě. Je pochopitelné, že v takových sítích chceme mít možnost se dostat z každého místa do každého jiného.

Grafům s takovou vlastností říkáme *souvislé*.



Stručný přehled lekce

- Definice souvislosti grafu, vrcholová / hranová, vyšší souvislost.
- Algoritmus procházení grafem (souvislou komponentou).
- Eulerovské grafy.

2.1 Spojení vrcholů, komponenty

Definice: *Sledem* délky n v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n,$$

ve které vždy hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1}, v_i .

Sled je vlastně procházka po hranách grafu z u do v . Příkladem sledu může být průchod IP paketu internetem (včetně cyklení). \square

Lema 2.1. *Mějme relaci \sim na množině vrcholů $V(G)$ libovolného grafu G takovou, že pro dva vrcholy $u \sim v$ právě když existuje v G sled začínající v u a končící ve v . Pak \sim je relací ekvivalence.*

Důkaz. Relace \sim je reflexivní, neboť každý vrchol je spojený sám se sebou sledem délky 0. Symetrická je také, protože sled z u do v snadno obrátíme na sled z v do u . Stejně tak je \sim tranzitivní, protože dva sledy můžeme na sebe navázat v jeden. \square \square

Definice: Třídy ekvivalence výše popsané (Lema 2.1) relace \sim na $V(G)$ se nazývají *komponenty souvislosti* grafu G .

Jinak se taky *komponentami souvislosti myslí podgrafy* indukované na těchto třídách ekvivalence.

Připomeňme si, že *cesta v grafu* je vlastně sledem bez opakování vrcholů.

Věta 2.2. *Pokud mezi dvěma vrcholy grafu G existuje sled, pak mezi nimi existuje cesta.* □

Důkaz. Necht' $u = v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = v$ je sled délky n mezi vrcholy u a v v G . Začneme budovat **nový sled W** z vrcholu $w_0 = u$, který už bude cestou:

- Předpokládejme, že nový sled W už má počátek $w_0, e_1, w_1, \dots, w_i$ (na začátku $i = 0$, tj. jen w_0 bez hran), kde $w_i = v_j$ pro některé $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. □
- Najdeme **největší index $k \geq j$** takový, že $v_k = v_j = w_i$, a sled W pokračujeme krokem $\dots, w_i = v_j = v_k, e_{k+1}, w_{i+1} = v_{k+1}, \dots$ □
- Zbývá dokázat, že nový vrchol $w_{i+1} = v_{k+1}$ se ve sledu W neopakuje. Pokud by tomu ale tak bylo $w_l = w_{i+1}$, $l \leq i$, pak bychom na vrchol w_{i+1} „přeskočili“ už dříve z vrcholu w_l , spor.
- Nakonec skončíme, když $w_i = v$. □

□

Ačkoliv uvedený důkaz vypadá složitě, je to jen jeho formálním zápisem. Ve skutečnosti se v důkaze neděje nic jiného, než že se původní sled zkracuje o opakované vrcholy, až nakonec zákonitě vznikne cesta. Jeho výhodou je konstruktivnost – vidíme, jak cestu získat.

Důkaz kratší, ale **nekonstruktivní**, pro Větu 2.2:

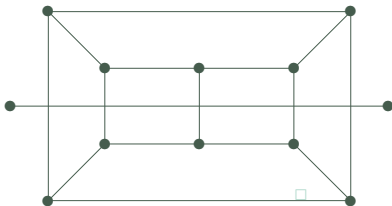
Ze všech sledů mezi vrcholy u a v v G vybereme sled W s nejmenší délkou. Je snadno vidět, že pokud W zopakuje některý vrchol grafu G , můžeme W ještě zkrátit, a to je spor s předpokladem. Proto je W cestou v G . \square

Závěrem se dostáváme k nejdůležitější definici souvislého grafu:

Definice 2.3. Graf G je souvislý

pokud je G tvořený nejvýše jednou komponentou souvislosti, tj. pokud každé dva vrcholy G jsou **spojené cestou** (dle Věty 2.2).

Podívejte se, kolik komponent souvislosti má tento graf:



Vidíte obě dvě komponenty?

2.2 Prohledávání grafu

Pro vytvoření co nejobecnějšího schématu *algoritmu pro procházení grafu* vystačíme s následujícími datovými stavy a pomocnou strukturou:

- **Vrchol:** má stavy ...
 - iniciační – dostane na začátku,
 - nalezený – poté, co jsme jej přes některou hranu našli,
 - zpracovaný – poté, co jsme už probrali všechny hrany z něj vycházející.
- **Hrana:** má stavy ...
 - iniciační – dostane na začátku,
 - zpracovaná – poté, co už byla probrána od jednoho ze svých vrcholů. □
- **Úschovna:** je pomocná datová struktura (množina),
 - udržuje nalezené a ještě nezpracované vrcholy.

Poznámka: Způsob, kterým se vybírají vrcholy z úschovny ke zpracování, určuje variantu algoritmu procházení grafu. V prohledávaných vrcholech a hranách se pak provádějí konkrétní programové **akce pro prohledání a zpracování** našeho grafu.

Algoritmus 2.4. Procházení souvislých komponent grafu

Algoritmus projde a zpracuje každou hranu a vrchol grafu G .

vstup $< \text{graf } G$;

stav(všechny vrcholy a hrany G) = *iniciační*;

uschovna $U = \{\text{libovolný vrchol } v_0 \text{ grafu } G\}$;

stav(v_0) = *nalezený*;

while (U je neprázdná) {

 vybrat $v \in U$; $U = U \setminus \{v\}$;

 ZPRACUJ(v);

 for (e hrany vycházející z v) {

 if (stav(e)==*iniciační*) ZPRACUJ(e);

$w = \text{druhý vrchol } e = vw$;

 if (stav(w)==*iniciační*) {

 stav(w) = *nalezený*;

$U = U \cup \{w\}$;

 }

 stav(e) = *zpracovaná*;

 }

 stav(v) = *zpracovaný*;

 if (U je prázdná && G má další komponenty)

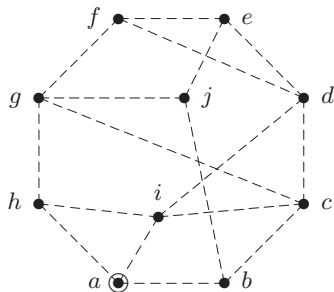
$U = \{\text{lib. vrchol } v_1 \text{ další komponenty } G\}$;

}

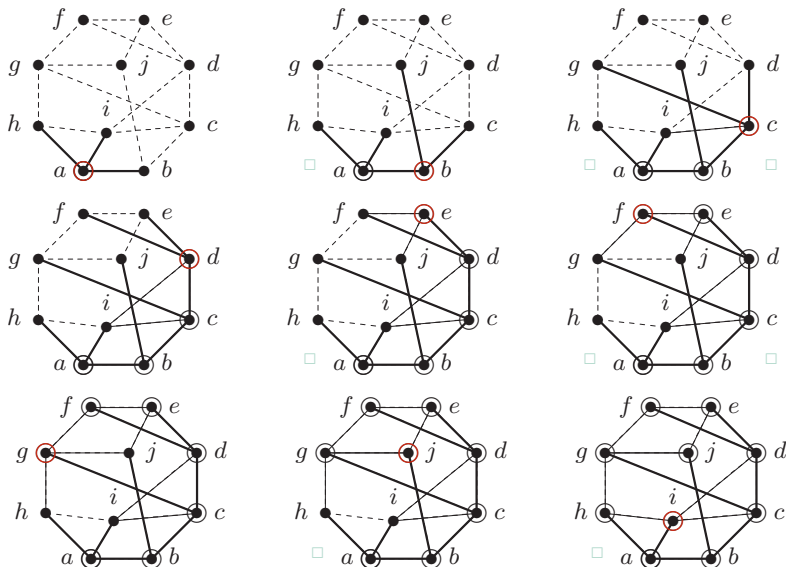
Způsoby implementace procházení grafu

- *Procházení „do hloubky“* – úschovna U je implementovaná jako zásobník, tj. dále prohledáváme od posledních nalezených vrcholů. □
- *Procházení „do šířky“* – úschovna U je implementovaná jako fronta, tj. dále prohledáváme od prvních nalezených vrcholů. □
- *Dijkstrův algoritmus* pro nejkratší cestu – z úschovny vybíráme vždy vrchol nejbližší k počátečnímu v_0 . (Toto je dost podobné prohledávání do šířky, ale obecnější i pro případy, kdy hrany nejsou „stejně dlouhé“.)
Tento algoritmus bude popsán v příští lekci. □

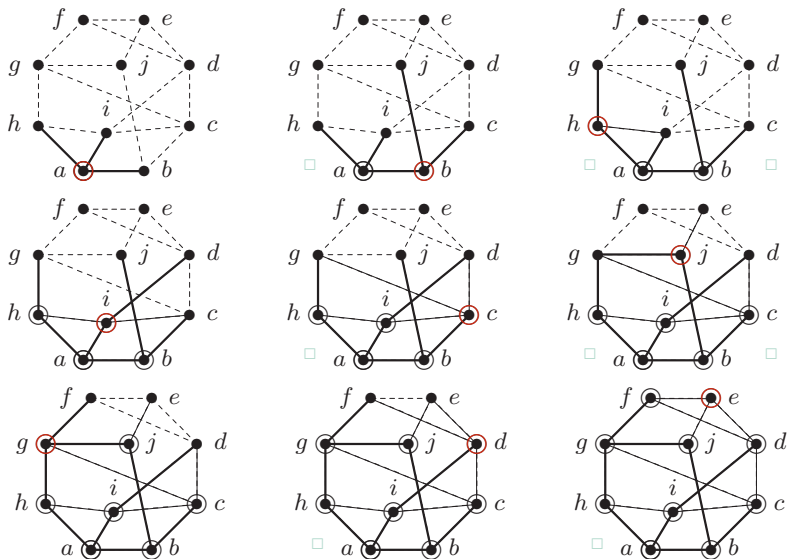
Příklad 2.5. Ukázka průchodu následujícím grafem do hloubky z vrcholu a .



Neprohledané hrany jsou čárkované, prohledané hrany plnou čarou a hrany, které vedly k nalezení vrcholů, jsou tlustou čarou (tyto hrany často mívají speciální význam v aplikacích schématu algoritmu). Nalezené vrcholy se poznají podle příchozí tlusté hrany a zpracované vrcholy jsou značené dvojím kroužkem.



Příklad 2.6. Ukázka průchodu předchozím grafem do šířky z vrcholu a .



Tímto zpracování zadaného grafu skončilo. Vidíte rozdíly tohoto průchodu proti předchozímu příkladu? □

2.3 Vyšší stupně souvislosti

V *síťových aplikacích* nás často zajímá nejen, jestli se za normálních podmínek můžeme pohybovat mezi vrcholy/uzly, ale také, jaké spojení můžeme nalézt v případě lokálních výpadků (odolnost a redundance).

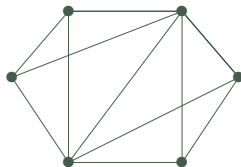
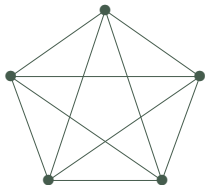
Toto lze teoreticky podchytit zkoumáním „vyšších“ stupňů souvislosti grafu. □

Definice: Graf G je *hranově k -souvislý*, $k > 1$, pokud i po odebrání libovolných **nejvýše** $k - 1$ hran z G zůstane výsledný graf souvislý. □

Definice: Graf G je *vrcholově k -souvislý*, $k > 1$, pokud i po odebrání libovolných nejvýše $k - 1$ vrcholů z G zůstane výsledný graf souvislý.
Speciálně úplný graf K_n je vrcholově $(n - 1)$ -souvislý.

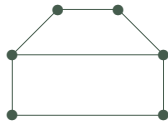
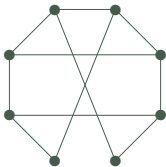
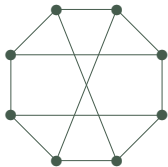
Pokud mluvíme jen o k -souvislém grafu, máme na mysli **vrcholově k -souvislý** graf. □

Stručně řečeno, vysoká hranová souvislost znamená vysoký stupeň odolnosti sítě proti výpadkům spojení-hran, neboli síť zůstane stále dosažitelná, i když libovolných $k - 1$ spojení bude přerušeno. Vysoká vrcholová souvislost je mnohem silnějším pojmem, znamená totiž, že síť zůstane dosažitelná i po výpadku libovolných $k - 1$ uzlů-vrcholů (samozřejmě mimo těch vypadlých uzlů).



Na ilustračním obrázku má první graf vrcholovou souvislost 4 a snadno vidíme, že po odebrání tří vrcholů či hran zůstává souvislý. Z druhého grafu bychom museli odebrat nejméně 3 hrany, aby se stal nesouvislým, a proto je jeho hranová souvislost 3. Na druhou stranu však stačí odebrat 2 vrcholy, aby mezi jeho levým a pravým krajním vrcholem žádné spojení nezůstalo. (Vidíte, které dva?) □

Věta 2.7. *Libovolný obyčejný graf je 2-souvislý, právě když jej lze vytvořit z kružnice „přidáváním uší“; tj. iterací operace, kdy libovolné dva stávající vrcholy grafu jsou spojeny novou cestou libovolné délky.*



Mengerova věta

Důkaz následujícího důležitého výsledku by nebyl jednoduchý při použití stávajících znalostí, proto jej ponecháme na pozdější lekce. . . („Toky v sítích“ .)

Věta 2.8. *Graf G je hranově k -souvislý právě když mezi libovolnými dvěma vrcholy lze vést aspoň k hranově-disjunktních cest (vrcholy mohou být sdílené).*

Graf G je vrcholově k -souvislý právě když mezi libovolnými dvěma vrcholy lze vést aspoň k disjunktních cest (různých až na ty dva spojované vrcholy). \square

Věta nám vlastně říká, že stupeň souvislosti grafu se přirozeně rovná stupni redundance spojení vrcholů. Na výše uvedeném obrázku mezi každými dvěma vrcholy prvního grafu můžeme vést až 4 disjunktní cesty.

U druhého grafu třeba mezi levým a pravým koncem lze vést jen 2 (vrcholově) disjunktní cesty, ale mezi každými dvěma vrcholy lze vést 3 hranově-disjunktní cesty.

V duchu předchozí Mengerovy věty pokračujeme s následujícími poznatky.

Věta 2.9. *Nechť G je vrcholově 2-souvislý graf. Pak každé dvě hrany v G leží na společné kružnici. \square*

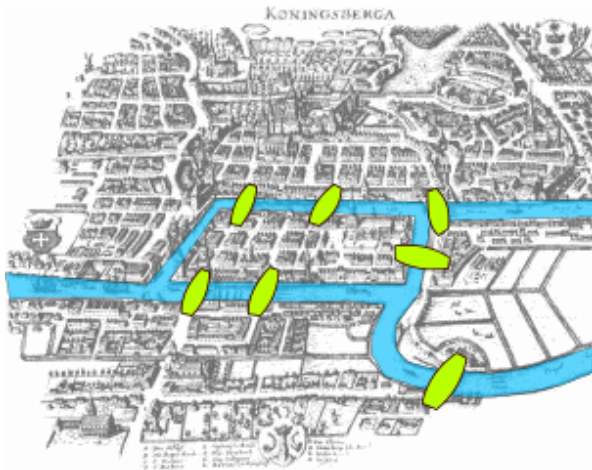
Důkaz: Nechť $e, f \in E(G)$. Sestrojíme graf G' podrozdělením obou hran e, f novými vrcholy v_e, v_f . Je zřejmé, že i G' je vrcholově 2-souvislý graf, takže podle Věty 2.8 existují v G' dvě disjunktní cesty spojující v_e s v_f , tvořící spolu kružnici C' . Nakonec C' indukuje v G kružnici C procházející e i f . \square

Rozšířením předchozí úvahy lze dokonce dokázat:

Věta 2.10. *Nechť G je vrcholově k -souvislý graf, $k \geq 1$. Pak pro každé dvě disjunktní množiny $U_1, U_2 \subset V(G)$, $|U_1| = |U_2| = k$ v G existuje k zcela disjunktních cest z vrcholů U_1 do vrcholů U_2 .*

2.4 Jedním tahem: Eulerovské grafy

Asi nejstarší výsledek teorie grafů vůbec pochází od Leonarda Eulera – jedná se o slavných 7 mostů v Královci / Königsbergu / dnešním Kaliningradě.

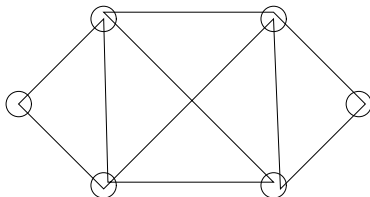
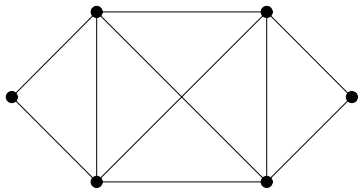


O jaký problém se tehdy jednalo? Městští radní chtěli vědět, zda mohou suchou nohou přejít po každém ze sedmi vyznačených mostů právě jednou.

Rozbor tohoto problému vede k následující definici a odpovědi.

Definice: *Tah* je sled v grafu bez opakování hran.

Uzavřený tah je tahem, který končí ve vrcholu, ve kterém začal.



Nejstarší výsledek teorie grafů od Leonarda Eulera poté zní: □

Věta 2.11. *Graf G lze nakreslit jedním uzavřeným tahem právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G jsou sudého stupně.* □

Důsledek 2.12. *Graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G až na dva jsou sudého stupně.*

Důkaz: Dokazujeme oba směry ekvivalence. Pokud lze G nakreslit jedním uzavřeným tahem, tak je zřejmě souvislý a navíc má každý stupeň sudý, neboť uzavřený tah každým průchodem vrcholem „ubere“ dvě hrany. \square

Naopak zvolíme mezi všemi uzavřenými tahy T v G ten (jeden z) nejdelší. Tvrdíme, že T obsahuje všechny hrany grafu G .

- Pro spor vezměme graf $G' = G - E(T)$, o kterém předpokládejme, že je neprázdný. Jelikož G' má taktéž všechny stupně sudé, je (z indukčního předpokladu) libovolná jeho komponenta $C \subseteq G'$ nakreslená jedním uzavřeným tahem T_C . \square
- Vzhledem k souvislosti grafu G každá komponenta $C \subseteq G'$ protíná náš tah T v některém vrchole w , a tudíž lze oba tahy T_C a T „propojit přes w “. To je spor s naším předpokladem nejdelšího možného T . \square

\square

Důkaz důsledku: Nechtě u, v jsou dva vrcholy grafu G mající lichý stupeň, neboli dva (předpokládané) konce otevřeného tahu pro G . Do G nyní přidáme nový vrchol w spojený hranami s u a v . Tím jsme náš případ převedli na předchozí případ grafu se všemi sudými stupni. \square