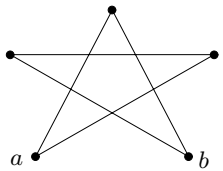
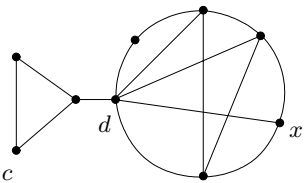
3 Vzdálenost a metrika v grafech

V minulé lekci jsme mluvili o souvislosti grafu, tj. o možnosti procházení z jednoho vrcholu do jiného. Někdy je prostá informace o souvislosti dostačující, ale většinou bychom rádi věděli i jak je to z jednoho vrcholu do druhého daleko.





V jednodušším případě se při zjišťování grafové vzdálenosti díváme jen na minimální počet prošlých hran z vrcholu do vrcholu.
V obecném případě však při určování vzdálenosti bereme do úvahy délky jednotlivých hran podél cesty (tyto délky musí být nezáporné!). □

Stručný přehled lekce

- Vzdálenost v grafech a její vlastnosti.
- Výpočet metriky grafu maticí.
- Dijkstrův algoritmus pro nejkratší (ohodnocenou) cestu v grafu.

3.1 Vzdálenost v grafu

Vzpomeňme si, že sledem délky n v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$, ve které hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1}, v_i.

Definice 3.1. **Vzdálenost** $d_G(u, v)$ dvou vrcholů u, v v grafu G je dána délkou nejkratšího sledu mezi u a v v G.
Pokud sled mezi u, v neexistuje, je vzdálenost $d_G(u, v) = \infty$. □

Neformálně řečeno, vzdálenost mezi u, v je rovna *nejmenšímu počtu hran*, které musíme projít, pokud se chceme dostat z u do v. Speciálně $d_G(u, u) = 0$.

Uvědomme si, že nejkratší sled je vždy cestou (vrcholy se neopakují) – Věta 2.2.

Poznámka: V neorientovaném grafu je vzdálenost symetrická $d_G(u, v) = d_G(v, u)$. □

Lema 3.2. *Vzdálenost v grafech splňuje trojúhelníkovou nerovnost:*

$$\forall u, v, w \in V(G) \ : \quad d_G(u, v) + d_G(v, w) \geq d_G(u, w)\,.$$

Důkaz. Nerovnost snadno plyne ze zřejmého pozorování, že na sled délky $d_G(u, v)$ mezi u, v lze navázat sled délky $d_G(v, w)$ mezi v, w, čímž vznikne sled délky $d_G(u, v) + d_G(v, w)$ mezi u, w. Skutečná vzdálenost mezi u, w pak už může být jen menší. □

Zjištění vzdálenosti

Věta 3.3. *Nechť u, v, w jsou vrcholy souvislého grafu G takové, že $d_G(u,v) < d_G(u,w)$. Pak při algoritmu procházení grafu G do šířky z vrcholu u je vrchol v nalezen dříve než vrchol w.* □

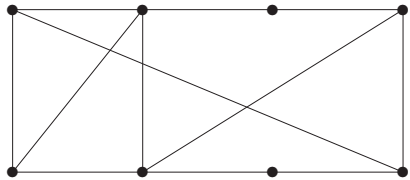
Důkaz. Postupujeme indukcí podle vzdálenosti $d_G(u,v)$: Pro $d_G(u,v) = 0$, tj. $u = v$ je tvrzení jasné – vrchol u jako počátek prohledávání byl nalezen první. Proto nechť $d_G(u,v) = d > 0$ a označme v' souseda vrcholu v bližšího k u, tedy $d_G(u,v') = d-1$. Stejně tak značme w' souseda vrcholu w bližšího k u, tedy $d_G(u,w') > d_G(u,v')$. Potom byl vrchol v' nalezen v prohledávání do šířky dříve než vrchol w' podle indukčního předpokladu. To znamená, že v' se dostal do fronty úschovny dříve než w', a tudíž sousedé v' (mezi nima v) budou při prohledávání nalezeni dříve než sousedé w'. □ □

Důsledek 3.4. *Základní algoritmus procházení grafu do šířky lze použít pro výpočet vzdálenosti z vrcholu u:*

Toto je poměrně jednoduchá aplikace, kdy počátečnímu vrcholu přiřadíme vzdálenost 0, a pak vždy každému dalšímu nalezenému vrcholu přiřadíme vzdálenost o 1 větší než byla vzdálenost vrcholu, ze kterého jsme jej nalezli. □

My si ale dále ukážeme obecnější Dijkstrův algoritmus, který počítá nejkratší vzdálenost při libovolně kladně ohodnocených délkách hran.

Další pojmy a fakta



Definice. Mějme graf G. Definujeme (vzhledem k G) následující pojmy a značení:

- *Excentricita* vrcholu $\mathrm{exc}(v)$ je nejdelší vzdálenost z v do jiného vrcholu grafu; $\mathrm{exc}(v) = \max_{x \in V(G)} d_G(v, x)$. □
- *Průměr* $\mathrm{diam}(G)$ grafu G je největší excentricita jeho vrcholů, naopak *poloměr* $\mathrm{rad}(G)$ grafu G je nejmenší excentricita jeho vrcholů. □
- *Centrem* grafu je množina vrcholů $U \subseteq V(G)$ takových, jejichž excentricita je rovna $\mathrm{rad}(G)$. □
- *Steinerova vzdálenost* mezi vrcholy libovolné podmnožiny $W \subseteq V(G)$ je rovna minimálnímu počtu hran souvislého podgrafu v G obsahujícího všechny vrcholy W.

Jedna zajímavost

Pro zajímavost (a zvídavé studenty) si uveďme následující vlastnost grafů. (Nebude třeba ke zkoušce.)

Definice: Graf je *vzdálenostně dědičný* (distance-hereditary), pokud vzdálenost každé dvojice jeho vrcholů u, v je stejná ve všech indukovaných souvislých podgrafech obsahujících u, v. □

Fakt. Grafy bez kružnic jsou vzdálenostně dědičné. □

Fakt. Následující konstrukce vytváří vzdálenostně dědičné grafy:

- Začněme z jediného vrcholu.
- Mějme dva grafy G_1, G_2 získané touto konstrukcí (rekurzivně). Vytvoříme jejich disjunktní sjednocení $G_1 \dot\cup G_2$.
- Mějme dva grafy G_1, G_2 získané touto konstrukcí (rekurzivně). Vytvoříme jejich disjunktní sjednocení $G_1 \dot\cup G_2$ a přidáme všechny hrany mezi $V(G_1)$ a $V(G_2)$. □

(Najděte vzdálenostně dědičný graf, který nelze takto sestrojit...)

Věta 3.5. *Graf G je vzdálenostně dědičný právě když každá kružnice délky alespoň 5 má v G dvě „zkřížené" tětivy.*

3.2 Výpočet metriky

Definice: Metrikou grafu myslíme soubor vzdáleností mezi všemi dvojicemi vrcholů grafu. Jinak řečeno, *metrikou grafu G je matice* (dvourozměrné pole) `d[,]`, ve kterém prvek `d[i,j]` udává vzdálenost mezi vrcholy i a j. □

Metoda 3.6. Iterativní výpočet metriky skládáním cest

- Na počátku nechť `d[i,j]` udává 1 (případně délku hrany $\{i, j\}$), nebo ∞ pokud hrana mezi i, j není. □
- Po každém kroku $t \geq 0$ nechť `d[i,j]` udává délku nejkratší cesty mezi i, j, která jde pouze přes vnitřní vrcholy z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, t-1\}$. □
- Při přechodu z t na následující krok $t+1$ upravujeme vzdálenost pro každou dvojici vrcholů – jsou vždy pouhé dvě možnosti:
  - Buď je cesta délky `d[i,j]` z předchozího kroku stále nejlepší (tj. nově povolený vrchol t nám nepomůže),
  - nebo cestu vylepšíme spojením přes nově povolený vrchol t, čímž získáme menší vzdálenost `d[i,t]+d[t,j]`.

Poznámka: V praktické implementaci pro symbol ∞ použijeme velkou konstantu, třeba `MAX_INT/2`.

Algoritmus 3.7. Výpočet metriky grafu

`vstup:` *matice sousednosti* `G[][]` *grafu na* `N` *vrcholech,*
kde `G[i,j]=1` *pro hranu mezi* i, j *a* `G[i,j]=0` *jinak*;

```
for (i=0; i<N; i++) for (j=0; j<N; j++)
    d[i,j] = (i==j?0: (G[i,j]? 1: MAX_INT/2));
for (t=0; t<N; t++) {
    for (i=0; i<N; i++) for (j=0; j<N; j++)
        d[i,j] = min(d[i,j], d[i,t]+d[t,j]);
}
```
□

Poznámka: Algoritmus 3.7 je implementačně velmi jednoduchý a provede zhruba N^3 kroků pro výpočet celé metriky.

Jeho jedinou (ale velkou) nevýhodou je, že vzdálenosti mezi všemi dvojicemi vrcholů je třeba *počítat najednou*. V praktických situacích však obvykle požadujeme zjištění vzdálenosti mezi jedinou dvojicí vrcholů, a pak celý zbytek výpočtu je k ničemu... □

Věta 3.8. *Algoritmus 3.7 v poli* `d[i,j]` *správně vypočte vzdálenost mezi vrcholy* i, j.

3.3 Vážená (ohodnocená) vzdálenost

Definice 3.9. Vážený graf je graf G
spolu s ohodnocením w hran reálnými čísly $w : E(G) \to \boldsymbol{R}$.
Kladně vážený graf G, w je takový, že $w(e) > 0$ pro všechny hrany e. □

Definice: Mějme (kladně) vážený graf G, w. Délkou váženého sledu $S = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$ v G myslíme součet

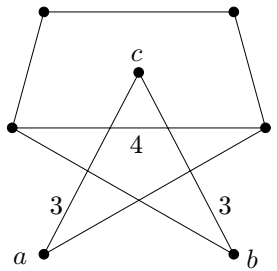
$$d_G^w(S) = w(e_1) + w(e_2) + \ldots + w(e_n)\,.$$

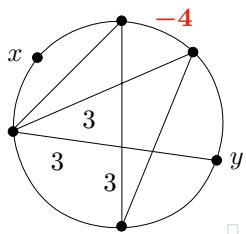
Váženou vzdáleností v G, w mezi dvěma vrcholy u, v pak myslíme

$$d_G^w(u, v) = \min\{d_G^w(S) : S \text{ je sled s konci } u, v\}\,.$$ □

Lema 3.10. *Vážená vzdálenost v kladně vážených grafech také splňuje trojúhelníkovou nerovnost.*

Podívejme se na následující graf vlevo. (Čísla u hran udávají jejich váhy, hrany bez čísel mají váhu 1.) Vážená vzdálenost mezi vrcholy a, c je 3, mezi b, c také 3. Jaká je vzdálenost mezi vrcholy a, b? Ne, není to 6, ale najdeme kratší cestu délky 5.





V druhém příkladě vpravo je uvedena i hrana se zápornou vahou -4. Nejkratší cesta mezi vrcholy x, y tak má délku -2, ale pokud vezmeme sled, který hranu váhy -4 vícekrát zopakuje, dostaneme se na libovolně nízkou zápornou délku. To je samozřejmě nesmyslné, a proto se takovému problému radši vyhýbáme zákazem záporných vah hran.

3.4 Hledání nejkratší cesty

Pro nalezení nejkratší (vážené) cesty mezi dvěma vrcholy kladně váženého grafu se používá známý tzv. *Dijkstrův algoritmus*.

Poznámka: Dijkstrův algoritmus je sice složitější než Algoritmus 3.7, ale na druhou stranu je *výrazně rychlejší*, pokud nás zajímá jen nejkratší vzdálenost z jednoho vrcholu místo všech dvojic vrcholů.
Zrovna tento algoritmus se například používá při vyhledávání vlakových či autobusových spojení. Pravděpodobně se i vy někdy dostanete do situace, kdy budete nejkratší cestu hledat, proto si tento algoritmus zapamatujte. □

Dijkstrův algoritmus

- Je variantou procházení grafu (skoro jako do šířky), kdy pro každý nalezený vrchol ještě máme *proměnnou udávající vzdálenost* – délku nejkratšího sledu (od počátku), kterým jsme se do tohoto vrcholu zatím dostali. □
- Z úschovny nalezených vrcholů vždy vybíráme vrchol s nejmenší vzdáleností (mezi uschovanými vrcholy) – do takového vrcholu se už lépe dostat nemůžeme, protože všechny jiné cesty by byly dle výběru delší. □
- Na konci zpracování tyto proměnné vzdálenosti udávají správně nejkratší vzdálenosti z počátečního vrcholu do ostatních.

Algoritmus 3.11. Dijkstrův pro nejkratší cestu v grafu

Tento algoritmus nalezne nejkratší cestu mezi vrcholy u a v kladně váženého grafu G.

vstup: *graf na* N *vrcholech daný seznamem sousedů* sous[][] *a* del[][],
kde sous[i][0],...,sous[i][st[i]-1] *jsou sousedé vrcholu* i *stupně* st[i]
a hrana z i *do* sous[i][k] *má délku* del[i][k]>0;

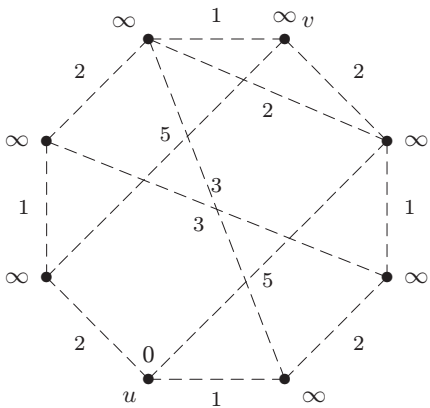
vstup: u,v, *kde hledáme cestu z* u *do* v;

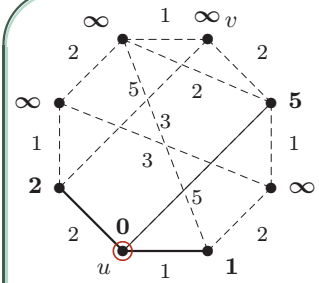
```
// stav[i] udává zpracovanost vrcholu, vzdal[i] zatím nalezenou vzdálenost
for (i=0; i<=N; i++) { vzdal[i] = MAX_INT; stav[i] = 0; }
vzdal[u] = 0;
while (stav[v]==0) {
    for (i=0, j=N; i<N; i++)
        if (stav[i]==0 && vzdal[i]<vzdal[j]) j = i;
    // zde jsme našli nejbližší nezpracovaný vrchol j, ten teď zpracujeme
    if (vzdal[j]==MAX_INT) return NENI_CESTA;
    stav[j] = 1;
    for (k=0; k<st[j]; k++)
        if (vzdal[j]+del[j][k]<vzdal[sous[j][k]]) {
            pri[sous[j][k]] = j;
            vzdal[sous[j][k]] = vzdal[j]+del[j][k];
        }
}
```

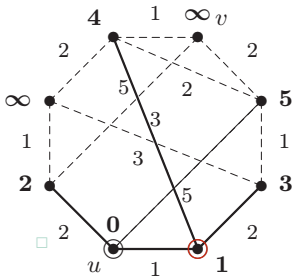
výstup '*Cesta délky* vzdal[v], *uložená pozpátku v poli* pri[]';

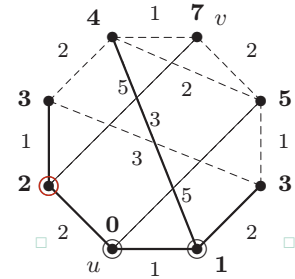
Poznámka: Uvědomme si, že pokud necháme tento algoritmus proběhnout až do zpracování všech vrcholů, získáme ve `vzdal[i]` nejkratší vzdálenosti z počátečního vrcholu do všech ostatních vrcholů.
Všimněme si dále, že Algoritmus 3.11 počítá stejně dobře nejkratší cestu i v orientovaném grafu.

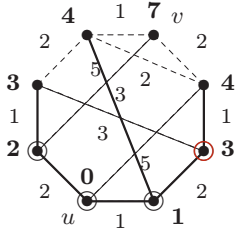
Příklad 3.12. *Ukázka běhu Dijkstrova Algoritmu 3.11 pro nalezení nejkratší cesty mezi vrcholy u, v v následujícím grafu.*

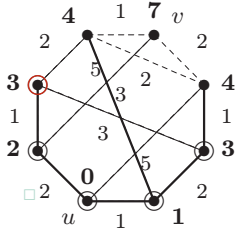


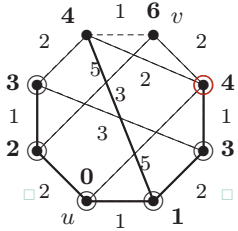

∞ 1 ∞ v
2 2
5 2
∞ 5
3
1 1
3
2 3
5
∞
2 0 2
u 1 1

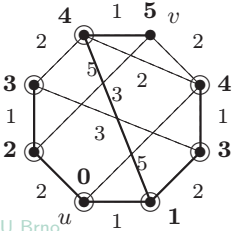

4 1 ∞ v
2 2
5 2
∞ 5
3
1 1
3
2 3
5
2 0 2
u 1 1

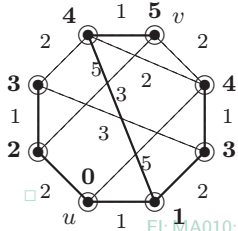

4 1 7 v
2 2
5 2
3 5
3
1 1
3
2 3
5
2 0 2
u 1 1


4 1 7 v
2 2
5 2
3 4
3
1 1
3
2 3
5
2 0 2
u 1 1


4 1 7 v
2 2
5 2
3 4
3
1 1
3
2 3
5
2 0 2
u 1 1


4 1 6 v
2 2
5 2
3 4
3
1 1
3
2 3
5
2 0 2
u 1 1


4 1 5 v
2 2
5 2
3 4
3
1 1
3
2 3
5
2 0 2
u 1 1


4 1 5 v
2 2
5 2
3 4
3
1 1
3
2 3
5
2 0 2
u 1 1

□

Důkaz správnosti Algoritmu 3.11 pomocí indukce.
Klíčovým faktem k důkazu správnosti algoritmu je to, že v každé iteraci (počínaje stavem po prvním průchodu cyklem `while()`) proměnná `vzdal[i]` udává nejkratší vzdálenost z vrcholu `u` do vrcholu `i` při cestě pouze po vnitřních vrcholech x, jejichž `stav[x]==1` (po zpracovaných vrcholech). □Stručně matematickou indukcí:

- V prvním kroku algoritmu je jako vrchol ke zpracování vybrán první `j=u` a potom jsou jeho sousedům upraveny vzdálenosti od `u` podle délek hran z `u`. □
- V každém dalším kroku je vybrán jako vrchol `j` ke zpracování ten, který má ze všech nezpracovaných vrcholů nejkratší nalezenou vzdálenost od počátku `u`. To ale znamená, že žádná kratší cesta už do `j` nevede, neboť každá „oklika“ přes jiné nezpracované vrcholy musí být delší dle výběru `j`. (V tomto bodě potřebujeme nezápornost ohodnocení `del[][]`.) Naopak můžeme podle délek hran vycházejících z `j` „vylepšit“ cesty do jeho sousedů. □

Závěrem zbývá ověřit, že nalezená nejkratší cesta z `u` do `v` je pozpátku uložená v poli `pri[]`, tj. předposlední vrchol před `v` je `pri[v]`, předtím `pri[pri[v]]`, atd... □ □

Fakt: Celkový počet kroků potřebný v Algoritmu 3.11 k nalezení nejkratší cesty z `u` do `v` je zhruba N^2, kde N je počet vrcholů grafu. □
Na druhou stranu, při lepší implementaci úschovny nezpracovaných vrcholů (třeba *haldou* s nalezenou vzdáleností jako klíčem) lze dosáhnout i mnohem rychlejšího běhu tohoto algoritmu na řídkých grafech – času zhruba úměrného počtu hran grafu.