5. Metody hledání bodových odhadů parametrů.
Úvod do testování hypotéz.

5.1. Motivace

5.2. Definice: Definice maximálně věrohodného odhadu.

5.3. Definice: Definice věrohodnostních rovnic.

5.4. Příklad: (Maximálně věrohodný odhad v diskrétním skalárním případě)
Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\vartheta)$. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad parametru ϑ.
Řešení:

$$X \sim A(\vartheta) \Rightarrow \pi(x) = \begin{cases} \vartheta^{x_i}(1-\vartheta)^{1-x_i} & \text{pro } x = 0,1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

Věrohodnostní funkce: $L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \vartheta^{x_i}(1-\vartheta)^{1-x_i} = \vartheta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\vartheta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$ pro $x_i = 0, 1$, $= 0$ jinak.

Logaritmická funkce věrohodnosti: $\ln L(\vartheta) = \ln\vartheta \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-\vartheta)$

Věrohodnostní rovnice:

$$\frac{d\ln L(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\vartheta} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\vartheta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\vartheta)\sum_{i=1}^{n} x_i - \vartheta\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - \vartheta\sum_{i=1}^{n} x_i - n\vartheta + \vartheta\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \hat{\vartheta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Maximálně věrohodným odhadem parametru ϑ alternativního rozložení $A(\vartheta)$ je tedy statistika $\hat{\vartheta}(X) = M$, tj. výběrový průměr.

5.5. Příklad: (Maximálně věrohodný odhad ve spojitém vektorovém případě)
Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad vektorového parametru $\boldsymbol{\vartheta} = (\mu, \sigma^2)$.

Řešení: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Věrohodnostní funkce: $L(\boldsymbol{\vartheta}) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i;\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)}{\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Logaritmická funkce věrohodnosti: $\ln L(\boldsymbol{\vartheta}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$.

Věrohodnostní rovnice:

$$\frac{\partial \ln L(\vartheta)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\vartheta)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

Z první rovnice plyne $\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Maximálně věrohodným odhadem parametru μ je tedy statistika $\hat{\mu}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = M$, tj. výběrový průměr.

Z druhé rovnice plyne $-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$. Za μ dosadíme odhad $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = m$ a získáme $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$. Maximálně věrohodným odhadem parametru σ^2 je tedy statistika $\hat{\sigma}^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$.

5.6. Definice: Definice momentového odhadu

5.7. Příklad: Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z geometrického rozložení $Ge(\vartheta)$. Metodou momentů najděte odhad parametru ϑ.

Řešení: $X \sim Ge(\vartheta)$ => $\pi(x) = \begin{cases} (1-\vartheta)^x \vartheta \text{ pro } x = 0, 1, \ldots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$. Lze odvodit, že $E(X) = \frac{1-\vartheta}{\vartheta}$.

Momentová rovnice: $\mu_1' = M_1'$, tj. $\frac{1-\vartheta}{\vartheta} = M \Rightarrow 1 - \vartheta = \vartheta M \Rightarrow \hat{\vartheta}(X) = \frac{1}{1+M}$.

5.8. Motivace k testování hypotéz.

5.9. Definice: Definice nulové a alternativní hypotézy.

5.10. Definice: Definice chyby 1. a 2. druhu.

5.11. Poznámka: Testování nulové hypotézy proti alternativní hypotéze třemi způsoby.

5.12. Definice: Definice testového kritéria, oboru nezamítnutí, kritického oboru a kritických hodnot.

5.13. Věta: Rozhodnutí o nulové hypotéze pomocí realizace testového kritéria v oboru nezamítnutí či v kritickém oboru.

5.14. Věta: Stanovení kritického oboru v případě oboustranné alternativy, levostranné alternativy, pravostranné alternativy.

5.15. Poznámka: Doporučený postup při testování nulové hypotézy proti alternativní hypotéze pomocí kritického oboru.

5.16. Věta: Testování nulové hypotézy proti alternativní hypotéze pomocí 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\vartheta)$.

5.17. Věta: Testování nulové hypotézy proti alternativní hypotéze pomocí p-hodnoty.

5.18. Poznámka: Ilustrace významu p-hodnoty.

5.19. Příklad: Nechť $X_1, ..., X_{400}$ je náhodný výběr z $N(\mu,0{,}01)$. Je známo, že výběrový průměr se realizoval hodnotou 0,01. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu H_0: $\mu = 0$ proti pravostranné alternativě H_1: $\mu > 0$

a) pomocí intervalu spolehlivosti
b) pomocí kritického oboru
c) pomocí p-hodnoty.

Řešení:
ad a) Při testování nulové hypotézy proti pravostranné alternativě používáme levostranný interval spolehlivosti.

$$d = m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 0{,}01 - \frac{0{,}1}{\sqrt{400}} u_{0,95} = 0{,}01 - \frac{0{,}1}{20} 1{,}64485 = 0{,}0018.$$

Protože číslo c = 0 neleží v intervalu (0,0018; ∞), H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.
ad b) Vypočteme realizaci testové statistiky:

$$t_0 = \frac{m-c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{0{,}01-0}{\frac{0{,}1}{\sqrt{400}}} = \frac{0{,}01 \cdot 20}{0{,}1} = 2.$$

Stanovíme kritický obor:

$$W = \langle u_{1-\alpha}, \infty) = \langle u_{0,95}, \infty) = \langle 1{,}64485, \infty)$$

Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.
ad c) Při testování nulové hypotézy proti pravostranné alternativě se p-hodnota počítá podle vzorce: $p = P(T_0 \geq t_0)$. V našem případě: $p = P(T_0 \geq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$.
Protože p-hodnota je menší než hladina významnosti 0,05, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.