8. Parametrické úlohy o jednom náhodném výběru a dvou nezávislých náhodných výběrech z alternativních rozložení

Opakování:

Alternativní rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v jednom pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je ϑ. Píšeme $X \sim A(\vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} 1-\vartheta \text{ pro } x = 0 \\ \vartheta \text{ pro } x = 1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases} \quad \text{neboli } \pi(x) = \begin{cases} \vartheta^x (1-\vartheta)^{1-x} \text{ pro } x = 0, 1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

Binomické rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ. Píšeme $X \sim Bi(n, \vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} \text{ pro } x = 0, \dots, n \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

$E(X) = n\vartheta$, $D(X) = n\vartheta\,(1-\vartheta)$

(Alternativní rozložení je speciálním případem binomického rozložení pro n = 1. Jsou-li $X_1, \dots, X_n$ stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, i = 1, ..., n, pak $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, \vartheta)$.)

Centrální limitní věta:

Jsou-li náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ stochasticky nezávislé a všechny mají stejné rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, pak pro velká n ($n \geq 30$) lze rozložení součtu $\sum_{i=1}^{n} X_i$ aproximovat normálním rozložením $N(n\mu, n\sigma^2)$. Zkráceně píšeme $\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$. Pokud součet $\sum_{i=1}^{n} X_i$ standardizujeme, tj. vytvoříme náhodnou veličinu $U_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pak rozložení této náhodné veličiny lze aproximovat standardizovaným normálním rozložením. Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$

8.1. Věta: Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$. Pak statistika $U = \dfrac{M - \vartheta}{\sqrt{\dfrac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}}$ konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným normálním rozložením. (Říkáme, že U má asymptoticky rozložení N(0,1) a píšemu $U \approx N(0,1)$.)

Důkaz:

Protože $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$, bude mít statistika $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (výběrový úhrn) rozložení $Bi(n, \vartheta)$. Y_n má střední hodnotu $E(Y_n) = n\vartheta$ a rozptyl $D(Y_n) = n\vartheta(1-\vartheta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná statistika $U = \frac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozložením N(0,1). Pokud čitatele i jmenovatele podělíme n, dostaneme vyjádření:

$$U = \frac{\frac{Y_n}{n} - \vartheta}{\sqrt{\frac{n\vartheta(1-\vartheta)}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} \approx N(0,1)$$

8.2. Věta: Vzorec pro meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ.
Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ jsou: $d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}, h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}$.

Důkaz:
Pokud rozptyl $D(M) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$ nahradíme odhadem $\frac{M(1-M)}{n}$, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením N(0,1) se neporuší. Tedy

$$\forall \vartheta \in \Xi : 1-\alpha \leq P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M-\vartheta}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$= P\left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}u_{1-\alpha/2} < \vartheta < M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}u_{1-\alpha/2}\right)$$

8.3. Příklad: Náhodně bylo vybráno 100 osob a zjištěno, že 34 z nich používá zubní kartáček zahraniční výroby. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba používá zubní kartáček zahraniční výroby.

Řešení:
Zavedeme náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_{100}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tá osoba používá zahraniční zubní kartáček a $X_i = 0$ jinak, i = 1, ..., 100. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.
$n = 100$, $m = 34/100$, $\alpha = 0{,}05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1{,}96$.
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem. Pak $100.0{,}34.0{,}66 = 22{,}44 > 9$.

$$d = 0{,}34 - \sqrt{\frac{0{,}34(1-0{,}34)}{100}}1{,}96 = 0{,}2472,\ h = 0{,}34 + \sqrt{\frac{0{,}34(1-0{,}34)}{100}}1{,}96 = 0{,}4328\,.$$

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $0{,}2472 < \vartheta < 0{,}4328$.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

a) Přesný způsob

Otevřeme nový datový soubor se dvěma proměnnými a jednom případu.
První proměnnou nazveme d a do jejího Dlouhého jména napíšeme
=0,34-sqrt(0,34*0,66/100)*VNormal(0,975;0;1)
Druhou proměnnou nazveme h a do jejího Dlouhého jména napíšeme
=0,34+sqrt(0,34*0,66/100)*VNormal(0,975;0;1)
Dostaneme výsledek:

	1 d	2 h
1	0,247155	0,432845

Vidíme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost používání zubního kartáčku zahraniční výroby bude pohybovat v mezích 0,2471 až 0,4328.

b) Přibližný způsob, použitelný pro dostatečně velký rozsah výběru

Do nového datového souboru o jedné proměnné X a 100 případech uložíme 34 jedniček (indikují používání zubního kartáčku zahraniční výroby) a 66 nul (indikují používání zubního kartáčku domácí výroby).
Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. prům. – ponecháme implicitní hodnotu pro Interval 95,00 – Výpočet.
Dostaneme tabulku:

Proměnná	Popisné statistiky (Tabulka3) N platných	Průměr	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. 95,000
X	100	0,340000	0,245532	0,434468

Dospěli jsme k výsledku, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost používání zubního kartáčku zahraniční výroby bude pohybovat v mezích 0,2455 až 0,4345.

8.4. Příklad: Kolik osob musíme vybrat, abychom podíl modrookých osob v populaci odhadli se spolehlivostí 90% a šířka intervalu spolehlivosti byla nanejvýš a) 0,06, b) 0,01?

Řešení:

Šířka 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ:

$$h-d = m+\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}-\left(m-\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}\right)=2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}$$

Požadujeme, aby h – d ≤ Δ, tedy $2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} \le \Delta$. Odtud vyjádříme

$$n \ge \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2}.$$

Předpokládejme, že nemáme žádné předběžné informace o podílu modrookých osob v populaci. Musíme tedy zvolit takové m, aby šířka intervalu spolehlivosti byla maximální. Maximalizujeme výraz $m(1-m)=m-m^2$. Derivujeme podle m a položíme rovno 0: $1-2m=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$.V tomto případě volíme relativní četnost m = 0,5.

ad a) $n \ge \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2}=\frac{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot u_{0{,}95}{}^2}{0{,}06^2}=\frac{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}645^2}{0{,}06^2}=751{,}67$

Uvedenou podmínku tedy splníme, když vybereme aspoň 752 osob.

ad b) $n \ge \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2}=\frac{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot u_{0{,}95}{}^2}{0{,}01^2}=\frac{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}645^2}{0{,}01^2}=27060{,}25$

Chceme-li dosáhnout podstatně užšího intervalu spolehlivosti, musíme vybrat aspoň 27 061 osob.

Modifikace: Předpokládejme, že v populaci je nanejvýš 30% modrookých osob. Pak relativní četnost m = 0,3.

ad a) $n \ge \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2}=\frac{4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot u_{0{,}95}{}^2}{0{,}06^2}=\frac{4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 1{,}645^2}{0{,}06^2}=631{,}41$

V tomto případě stačí vybrat 632 osob.
Ve srovnání s předešlým případem vidíme, že rozsah výběru skutečně klesl.

ad b)

$$n \ge \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2}=\frac{4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot u_{0{,}95}{}^2}{0{,}01^2}=\frac{4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 1{,}645^2}{0{,}01^2}=22730{,}61$$

V tomto případě musíme vybrat aspoň 22 731 osob.

8.5. Věta: Testování hypotézy o parametru ϑ.
Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení A(ϑ) a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$. Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: $\vartheta = c$ proti alternativě H_1: $\vartheta \neq c$ (resp. H_1: $\vartheta < c$ resp. H_1: $\vartheta > c$). Testovým

kritériem je statistika $T_0 = \frac{M-c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1). Kritický obor má tvar $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$ (resp. $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$ resp. $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$).
(Testování hypotézy o parametru ϑ lze samozřejmě provést i pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

8.6. Příklad: Podíl zmetků při výrobě určité součástky činí $\vartheta = 0{,}01$. Bylo náhodně vybráno 1000 výrobků a zjistilo se, že mezi nimi je 16 zmetků. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu H_0: $\vartheta = 0{,}01$ proti oboustranné alternativě H_1: $\vartheta \neq 0{,}01$.

Řešení:
Zavedeme náhodné veličiny $X_1, \dots, X_{1000}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tý výrobek byl zmetek a $X_i = 0$ jinak, i = 1, ..., 1000. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.
Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta = 0{,}01$ proti alternativě H_1: $\vartheta \neq 0{,}01$.
Známe: n = 1000, $m = \frac{16}{1000} = 0{,}016$, c = 0,01, α = 0,05, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1{,}96$
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: 1000.0,01.0,99 = 9,9 > 9.

a) Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m-c}{\sqrt{\frac{c\cdot(1-c)}{n}}} = \frac{0{,}016-0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}01\cdot 0{,}99}{1000}}} = 1{,}907$.

Kritický obor: $W = \left(-\infty, -u_{0,975}\right\rangle \cup \left\langle u_{0,975}, \infty\right) = \left(-\infty, -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96, \infty\right)$. Protože 1,907 $\notin$ W, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

b) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} = 0{,}016 - \sqrt{\frac{0{,}016\cdot 0{,}984}{500}}1{,}96 = 0{,}0082$$
$$h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} = 0{,}016 + \sqrt{\frac{0{,}016\cdot 0{,}984}{500}}1{,}96 = 0{,}0238$$

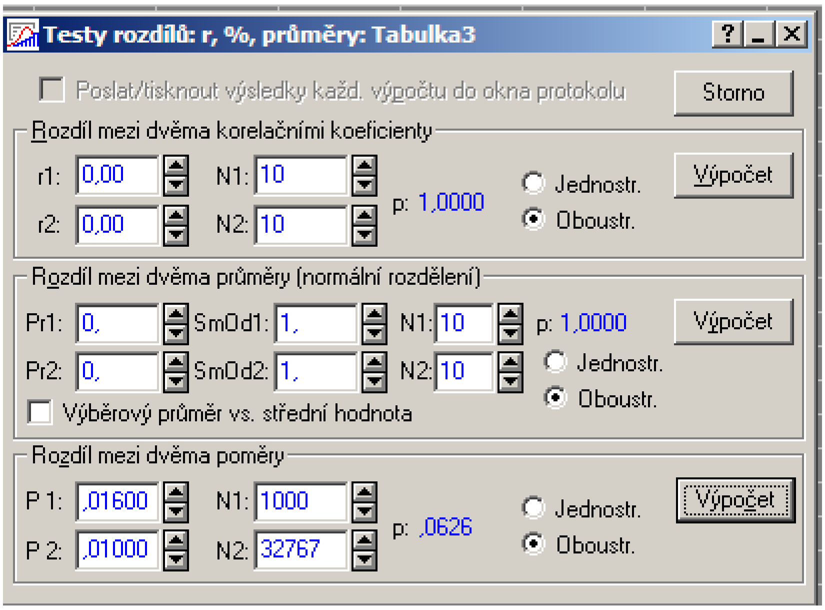
Protože číslo c = 0,01 leží v intervalu 0,0082 až 0,0238, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

c) Testování pomocí p-hodnoty

Protože testujeme nulovou hypotézu proti oboustranné alternativě, vypočteme p-hodnotu podle vzorce:
$p = 2 \min\{ \Phi(1{,}907), 1-\Phi(1{,}907) \} = 2 \min\{ 0{,}97104, 1 - 0{,}97104 \} = 0{,}05792$.

Protože vypočtená p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA (pouze přibližný):
Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,016, do políčka N1 napíšeme 1000, do políčka P 2 napíšeme 0,01, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0626, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.



8.7. Příklad: Nový léčebný postup považujeme za úspěšný, pokud po jeho ukončení bude dosaženo zlepšení zdravotního stavu u alespoň 50% zúčastněných pacientů. Nová terapie byla vyzkoušena u 40 pacientů a ke zlepšení došlo u 24 osob. Je možné na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že tato terapie nedosahuje úspěšnosti aspoň 50%?

Řešení:
Zavedeme náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_{40}$, přičemž $X_i = 1$, když terapie u i-tého pacienta byl úspěšná a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \ldots, 40$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.
Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta \le 0,5$ proti pravostranné alternativě H_1: $\vartheta > 0,5$.

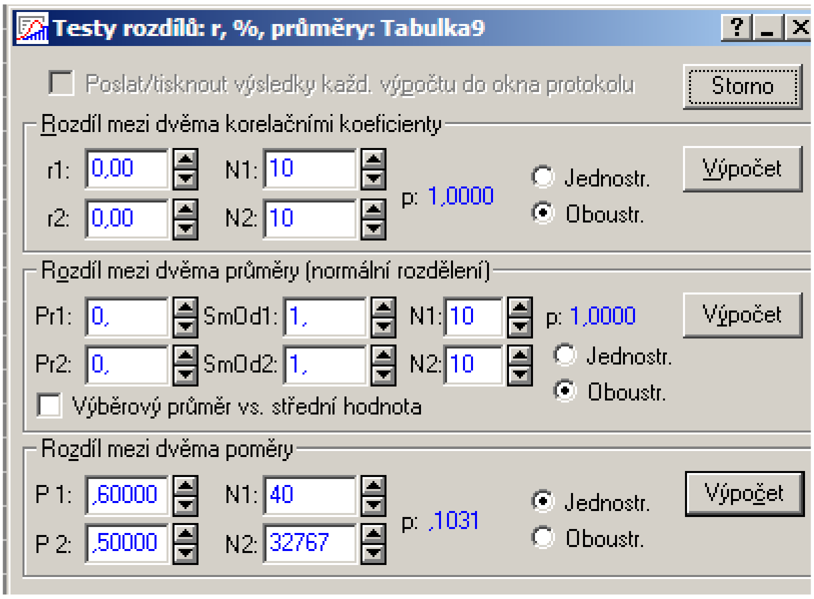
Známe: $n = 40,\ m = \frac{24}{40} = 0,6$, $c = 0,5$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: 40.0,6.0,4 = 9,6 > 9.

Realizace testového kritéria: $t_0 = \dfrac{m-c}{\sqrt{\dfrac{c\cdot(1-c)}{n}}} = \dfrac{0,6-0,5}{\sqrt{\dfrac{0,5\cdot 0,5}{40}}} = 1,2649$.

Kritický obor: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty) = \langle u_{0,95}, \infty) = \langle 1{,}645, \infty)$. Protože 1,2649 $\notin$ W, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:



Vypočtená p-hodnota jednostranného testu je 0,1031, tedy menší než asymptotická hladina významnosti 0,05. H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

8.8. Věta: Asymptotické rozložení statistiky odvozené ze dvou výběrových průměrů.
Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozložení A(ϑ_1) a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení A(ϑ_2) a nechť jsou splněny podmínky $n_1\vartheta_1\,(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2\,(1-\vartheta_2) > 9$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry.
Pak statistika $U = \dfrac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\dfrac{\vartheta_1(1-\vartheta_1)}{n_1} + \dfrac{\vartheta_2(1-\vartheta_2)}{n_2}}} \approx N(0,1)$.

Důkaz:
Analogicky jako v případě jednoho náhodného výběru z alternativního rozložení.

8.9. Věta: Vzorec pro meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$.
Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2},$$

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2}$$

Důkaz:

Pokud rozptyl $D(M_i) = \frac{\vartheta_i(1-\vartheta_i)}{n_i}$ nahradíme odhadem $\frac{M_i(1-M_i)}{n_i}$, i = 1, 2, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením N(0,1) se neporuší. Tedy

$$\forall \vartheta_1 - \vartheta_2 \in \Xi : 1-\alpha \le P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}} < u_{1-\alpha/2} \right) =$$

$$= P(M_1 - M_2 - \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2} < \vartheta_1 - \vartheta_2 <$$

$$< M_1 - M_2 + \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2})$$

8.10. Příklad: Management supermarketu vyhlásil týden slev a sledoval, zda toto vyhlášení má vliv na podíl větších nákupů (nad 500 Kč). Na základě náhodného výběru 200 zákazníků v týdnu bez slev bylo zjištěno 97 velkých nákupů, zatímco v týdnu se slevou z 300 náhodně vybraných zákazníků učinilo velký nákup 162 zákazníků. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro rozdíl pravděpodobností uskutečnění většího nákupu v týdnu bez slevy a v týdnu se slevou.

Řešení:

Zavedeme náhodnou veličinu X_{1i}, která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu bez slevy i-tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, i = 1, …, 200. Náhodné veličiny $X_{1,1}, \ldots, X_{1,200}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_1)$. Dále zavedeme náhodnou veličinu X_{2i}, která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu se slevou i-tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, i = 1, …, 300. Náhodné veličiny $X_{2,1}, \ldots, X_{2,300}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_2)$.

$n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $m_1 = 97/200 = 0{,}485$, $m_2 = 162/300 = 0{,}54$.

Ověření podmínek $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$: Parametry ϑ_1 a ϑ_2 neznáme, nahradíme je odhady m_1 a m_2. 97.(1-97/200) = 49,955 > 9, 162.(1-162/300) = 74,52 > 9.

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2} =$$

$$= \frac{97}{200} - \frac{162}{300} - \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}}\,1{,}96 = -0{,}1443$$

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2} =$$

$$= \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}}\,1{,}96 = 0{,}0343$$

Zjistili jsme tedy, že s pravděpodobností přibližně 0,95: $-0{,}1443 < \vartheta_1 - \vartheta_2 < 0{,}0343$.

8.11. Věta: Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$

Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozložení A(ϑ_1) a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení A(ϑ_2) a nechť jsou splněny podmínky $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$. Na asymptotické hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu H_0: $\vartheta_1 - \vartheta_2 = c$ proti alternativě H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 \neq c$ (resp. H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 < c$ resp. H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 > c$). Testovým kritériem je statistika

$$T_0 = \frac{M_1 - M_2 - c}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}},$$

která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1). Kritický obor má tvar

$$W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$$

(resp. $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$ resp. $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$).

(Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ lze provést též pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

8.12. Poznámka: Postup při testování hypotézy $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$

Je-li c = 0, pak označme $M_* = \frac{n_1M_1 + n_2M_2}{n_1 + n_2}$ vážený průměr výběrových průměrů.

Jako testová statistika slouží $T_0 = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1-M_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1). Kritický obor má tvar $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$ (resp. $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$ resp. $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$). Testová statistika T_0 vznikne standardizací statistiky $M_1 - M_2$, kde neznámé parametry ϑ_1, ϑ_2 nahradíme společným odhadem M_*.

8.13. Příklad: Pro údaje z příkladu 8.10. testujte na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu, že týden se slevami nezvýší pravděpodobnost uskutečnění většího nákupu.

Řešení:

Testujeme hypotézu $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ proti levostranné alternativě H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 < 0$ na asymptotické hladině významnosti 0,05.

$n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $m_1 = 97/200$, $m_2 = 162/300$, $m_* = (97 + 162)/500 = 0{,}518$.

Podmínky dobré aproximace byly ověřeny v příkladu 8.10.

Testování pomocí intervalu spolehlivosti:

Pro levostrannou alternativu používáme pravostranný interval spolehlivosti:

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha} =$$

$$= \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}}\,1{,}645 = 0{,}02$$

Protože číslo c = 0 je obsaženo v intervalu $(-\infty; 0{,}02\rangle$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{m_*(1-m_*)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{97}{200} - \frac{162}{300}}{\sqrt{0{,}518(1-0{,}518)\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{300}\right)}} = -1{,}2058.$$

Kritický obor je $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle = (-\infty, -u_{0,95}\rangle = (-\infty, -1{,}645\rangle$. Protože testové kritérium nepatří do kritického oboru, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí p-hodnoty:

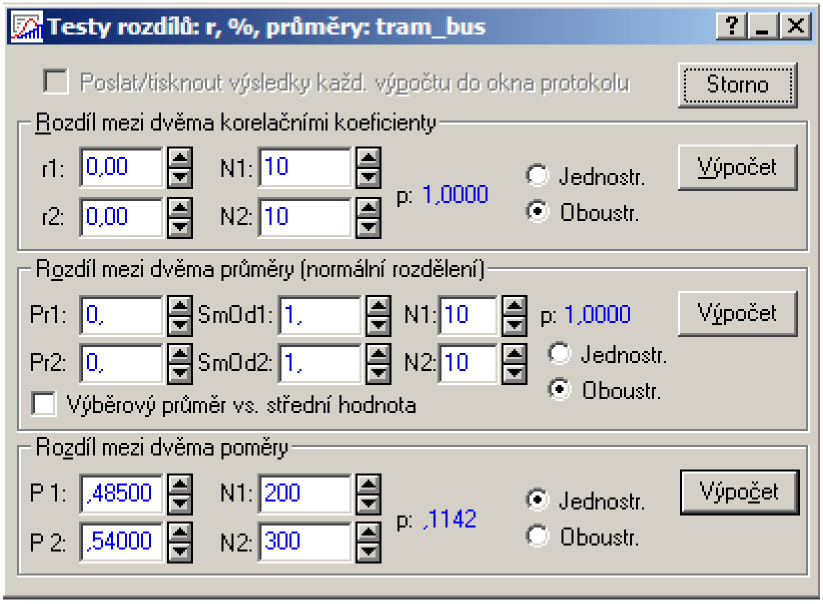
Pro levostrannou alternativu se p-hodnota počítá podle vzorce $p = P(T_0 \leq t_0)$:

$$p = P(T_0 \leq -1{,}2058) = \Phi(-1{,}2058) = 1 - \Phi(1{,}2058) = 1 - 0{,}8861 = 0{,}1139$$

Protože p-hodnota je větší než 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,485, do políčka N1 napíšeme 200, do políčka P 2 napíšeme 0,54, do políčka N2 napíšeme 300 – zaškrtneme Jednostr. - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,1142, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.


Testy rozdílů: r, %, průměry: tram_bus
Poslat/tisknout výsledky každ. výpočtu do okna protokolu
Storno
Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty
r1: 0,00
N1: 10
r2: 0,00
N2: 10
p: 1,0000
Jednostr.
Oboustr.
Výpočet
Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)
Pr1: 0,
SmOd1: 1,
N1: 10
p: 1,0000
Výpočet
Pr2: 0,
SmOd2: 1,
N2: 10
Jednostr.
Oboustr.
Výběrový průměr vs. střední hodnota
Rozdíl mezi dvěma poměry
P 1: ,48500
N1: 200
P 2: ,54000
N2: 300
p: ,1142
Jednostr.
Oboustr.
Výpočet