# Příklady na cvičení ke 3. přednášce

**Příklad 1.:** Odvoďte hustotu náhodného výběru z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.
Výsledek:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

**Příklad 2.:** Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení se střední hodnotou $\mu$ a rozptylem $\sigma^2$. Nechť $n \geq 2$.

a) Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl výběrového průměru $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ .

b) Vypočtěte střední hodnotu výběrového rozptylu $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$

Výsledek: a) $\mu$, b) $\sigma^2$

**Příklad 3.:** Odvození střední hodnoty a rozptylu výběrové distribuční funkce
Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení s distribuční funkcí $\Phi(x)$. Nechť $n \geq 2$.
Pro libovolné, ale pevně zvolené reálné x vypočtěte střední hodnotu a rozptyl výběrové distribuční funkce $F_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{card}\{i; X_i \leq x\}$.
Výsleek: $E(F_n(x)) = \Phi(x)$, $D(F_n(x)) = \Phi(x)(1- \Phi(x))/n$.

**Příklad 4.:** Odvození střední hodnoty výběrové kovariance
Nechť $(X_1,Y_1), \dots, (X_n,Y_n)$ je náhodný výběr z dvourozměrného rozložení s vektorem středních hodnot $(\mu_1, \mu_2)$ a kovariancí $\sigma_{12}$. Vypočtěte střední hodnotu výběrové kovariance
$S_{12} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_1)(Y_i - M_2)$.
Výsledek: $\sigma_{12}$

**Příklad 5.:** Jsou dány hodnoty 10, 12, 8, 9, 16. Považujeme je za realizace náhodného výběru z rozložení, které má střední hodnotu $\mu$, rozptyl $\sigma^2$ a distribuční funkci $\Phi(x)$. Vypočtěte realizace výběrového průměru, výběrového rozptylu, výběrové směrodatné odchylky a sestrojte graf výběrové distribuční funkce.
Výsledek: $m = 11$, $s^2 = 10$, $s = \sqrt{10}$.

**Příklad 6.:** Výpočet výběrového koeficientu korelace
Máme k dispozici výsledky testů ze dvou předmětů zjištěné u osmi náhodně vybraných studentů určitého oboru.

| Číslo studenta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Počet bodů v 1. testu | 80 | 50 | 36 | 58 | 42 | 60 | 56 | 68 |
| Počet bodů ve 2. testu | 65 | 60 | 35 | 39 | 48 | 44 | 48 | 61 |

Vypočtěte a interpretujte výběrový koeficient korelace. Pro usnadnění výpočtů máte k dispozici tyto součty:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 450, \sum_{i=1}^{8} y_i = 400, \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 26684, \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 20836, \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 23214$$

Výsledek: 0,6668. Lze tedy soudit, že mezi výsledky obou testů existuje středně silná přímá lineární závislost.